

SÉRIE A,
N° 2344
N° D'ORDRE :
3416

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

AUGUSTIN BLAQUIÈRE

1^{re} THÈSE. — EFFET DU BRUIT DE FOND SUR LA FRÉQUENCE DES AUTO-OSCILLATEURS
A LAMPES. PRÉCISION ULTIME DES HORLOGES RADIOÉLECTRIQUES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 29 AVR 1953 devant la Commission d'examen.

MM. L. DE BROGLIE, *Président.*
DANJON, } *Examineurs.*
P. GRIVET, }

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1953



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552428_0043

SÉRIE A,
N° 2344
N° D'ORDRE :
3416

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

AUGUSTIN BLAQUIÈRE

1^{re} THÈSE. — EFFET DU BRUIT DE FOND SUR LA FRÉQUENCE DES AUTO-OSCILLATEURS
A LAMPES. PRÉCISION ULTIME DES HORLOGES RADIOÉLECTRIQUES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 29 AVR 1953 devant la Commission d'examen.

MM. L. DE BROGLIE, *Président.*

DANJON, } *Examineurs.*
P. GRIVET, }

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1953

PREMIÈRE THÈSE

EFFET DU BRUIT DE FOND SUR LA FRÉQUENCE DES AUTO-OSCILLATEURS A LAMPES. PRÉCISION ULTIME DES HORLOGES RADIOÉLECTRIQUES ⁽¹⁾.

SOMMAIRE. — Cet article traite de l'effet du bruit de fond sur le régime, et plus particulièrement sur la fréquence des auto-oscillateurs à lampes stabilisés en amplitude. Après un bref rappel des méthodes classiques de l'analyse des bruits utilisées pour les systèmes physiques régis par des équations linéaires, l'auteur montre que ces méthodes sont inutilisables quand les systèmes sont régis par des lois non linéaires. Les auto-oscillateurs à lampes se plaçant dans cette dernière catégorie, il est nécessaire de modifier les résultats valables pour les systèmes linéaires et de les adapter.

L'auteur a adapté à ce cas la méthode de Rice et envisage d'abord l'effet d'une impulsion électronique isolée dont l'action peut être décomposée en une perturbation d'amplitude et en un petit déphasage. L'auteur construit ensuite la perturbation totale apportée par le spectre de bruit complet à partir de ces perturbations élémentaires et il exprime la modification qu'elles imposent à l'oscillation idéale.

Les méthodes utilisées sont applicables également à des oscillateurs basés sur des principes différents de ceux des horloges à quartz tels que les oscillateurs klystrons, par exemple.

INTRODUCTION.

Un auto-oscillateur stabilisé en amplitude ne suit jamais une loi rigoureusement sinusoïdale. L'effet de la courbure des caractéristiques introduit de la

distorsion, et mène en première approximation à représenter son oscillation par la superposition d'un fondamental et de nombreux harmoniques.

Une altération plus grave est introduite par des perturbations aléatoires de natures diverses, qui

⁽¹⁾ Cette étude a été faite sous la direction du Professeur P. Grivet, qui m'en a proposé le sujet. Je suis heureux de

lui exprimer ici ma profonde gratitude pour m'avoir aidé de ses conseils, et guidé dans ce travail.

prennent naissance en certaines régions du système. Elle détruit la périodicité du signal en entraînant des fluctuations très irrégulières de son amplitude et de sa fréquence.

Les sources de fluctuations sont multiples :

Elles peuvent être de nature macroscopique et grossière, c'est le cas des variations de température des éléments du circuit, des chocs mécaniques, de la mauvaise suspension des quartz dans leurs supports, etc.

Elles peuvent aussi être de nature microscopique, c'est-à-dire avoir une origine atomique, moléculaire ou électronique.

Deux effets importants de ce type sont :

Les différences de potentiel qui prennent naissance entre les extrémités des résistances, par suite des fluctuations en densité du gaz d'électrons qu'elles contiennent (bruit d'agitation thermique dans les résistances);

L'émission irrégulière des cathodes des lampes radioélectriques (effet de grenaille).

Ces deux dernières causes seront seules envisagées ici, et le but de l'étude sera de savoir si elles suffisent à expliquer les irrégularités qui subsistent dans les montages très soignés, où toutes les précautions sont prises pour éliminer les autres actions extérieures.

La principale difficulté du problème provient de l'impossibilité où l'on se trouve de lui appliquer les méthodes classiques de l'analyse des bruits.

Ces méthodes, couramment employées pour déterminer les perturbations de régime apportées par les bruits aux systèmes physiques régis par des équations linéaires, sont inutilisables, sous leur forme traditionnelle, quand les systèmes sont régis par des lois non linéaires.

C'est dans cette deuxième catégorie que se placent les auto-oscillateurs fonctionnant au voisinage du régime stable, dont on examinera le comportement.

On sera donc amené à modifier les résultats valables pour les systèmes linéaires, et à les adapter à ces oscillateurs.

La première partie, rassemblera les éléments de l'étude, en insistant sur les représentations très diverses des impulsions originelles. Le choix d'une bonne représentation simplifiera, en effet, considérablement le passage du cas linéaire au cas non linéaire.

La deuxième partie sera consacrée à l'effet du bruit de fond sur le régime des auto-oscillateurs non linéaires et, plus particulièrement, sur leur fréquence.

Une conséquence en sera l'évaluation de la limite de l'erreur commise sur la mesure du temps quand l'oscillateur est utilisé comme horloge radioélectrique.

Cependant, les perturbations de fréquence et d'amplitude sont si étroitement liées qu'il est impossible de les traiter de façon absolument distincte. On sera donc conduit à examiner aussi les fluctuations de l'amplitude dont il est également intéressant de connaître les lois : ce phénomène joue un rôle important dans les télécommunications (modulation de fréquence par événement) et en physique, entre autres dans la détection de la résonance magnétique nucléaire.

I. PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES ET STATISTIQUES DU BRUIT DE FOND (RAPPEL).

1. Propriétés élémentaires, « structure » du bruit de fond.

A. LES IMPULSIONS ORIGINELLES. — *a. Fonction impulsive.* — Les chocs élémentaires produits par une source de bruit peuvent être commodément représentés au moyen de fonctions impulsives dont le type est la fonction $\delta(t)$ de Dirac.

Rappelons les propriétés qui servent à définir cette fonction :

1° Elle est nulle pour toute valeur de t extérieure à un intervalle Δt infiniment court entourant l'origine des temps;

2° L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt$ a une valeur finie (valeur posée égale à 1); il s'en suit que $\delta(t)$, nul pour toute valeur de t différente de zéro, est infini pour $t = 0$.

Empruntons un exemple à la mécanique. La fonction impulsive est alors une force $F(t)$ appliquée pendant un instant très court à un point matériel (on la supposera nulle en dehors de ce laps de temps); elle entraîne une variation brutale de la quantité de mouvement du point solide.

Il faut que, pendant cette durée extrêmement courte, la force en action devienne extrêmement grande pour que la vitesse du point matériel varie d'une façon sensible.

L'intégrale de Dirac $q = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) dt$ a ici un sens physique simple, elle mesure la variation de la quantité de mouvement du point matériel considéré. On l'appelle « percussion ».

Un autre exemple, analogue, est celui où l'on applique entre deux bornes d'un réseau conducteur

une force électromotrice $E(t)$ pendant un temps très court. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} E(t)dt$ sera appelée dans ce cas « échelon » ⁽²⁾ de la fonction $E(t)$, le terme « percussion » étant surtout réservé à une action mécanique.

Dans le cas général, l'impulsion est produite à un instant t_j quelconque (différent de zéro), et son échelon q est différent de 1; nous la désignerons alors par $G(t-t_j)$.

Cette fonction $G(t-t_j)$ se déduit de la fonction normalisée $\delta(t)$ par translation dans le temps et multiplication par q .

En pratique, les impulsions réelles ont une durée très courte, mais non nulle. Les forces ou les tensions mises en jeu prennent des valeurs très grandes, mais

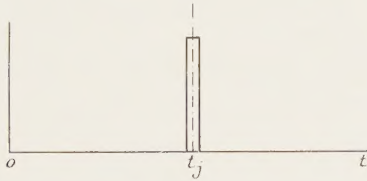


Fig. 1.

finies. La fonction impulsive dont nous venons de rappeler la définition mathématique apparaît donc comme une limite théorique commode.

L'image la plus simple que l'on puisse donner de l'impulsion réelle est celle d'un créneau (fig. 1) de faible largeur et de grande hauteur.

L'échelon de cette impulsion est alors la surface du créneau.

b. Développement de Fourier de la fonction impulsive $G(t-t_j)$. — Les impulsions naturelles produites par la source de bruit n'ont, bien entendu, aucun caractère sinusoïdal. Il est possible cependant d'introduire une périodicité fictive en imaginant qu'une impulsion donnée se reproduira au bout de temps $T, 2T, 3T, \dots$

Toutes les fois que cette impulsion, à répétition périodique, agira sur un système son action sera la même que celle de l'impulsion unique donnée, à la condition que T soit assez grand pour que le système n'ait pas gardé la mémoire du choc antérieur.

On a ainsi le droit d'assimiler l'action d'une impulsion naturelle unique à celle d'une impulsion de la

suite de période T , et il est alors possible de trouver des développements de Fourier introduisant des composantes sinusoïdales réparties sur toute la gamme des fréquences.

Nous donnons ci-dessous, sans justification, un tel développement pour la fonction impulsive $G(t-t_j)$ d'échelon q , avec un intervalle de répétition 0, T :

$$(I.1) \quad G(t-t_j) = \frac{q}{T} + \frac{2q}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi n(t-t_j)}{T}.$$

Les harmoniques successifs de ce développement ont des fréquences qui diffèrent de la quantité constante $\Delta\nu = \frac{1}{T}$ (pour l'intervalle 0, T choisi).

Désignons par ν_n la fréquence du $n^{\text{ième}}$ harmonique, nous pourrions écrire :

$$(I.2) \quad G(t-t_j) = q \Delta\nu + 2q \Delta\nu \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2\pi \nu_n(t-t_j),$$

avec

$$\nu_n = \frac{n}{T}, \quad \Delta\nu = \frac{1}{T}.$$

Si l'on autorise les fréquences négatives, on voit facilement que cette expression se réduit à la forme plus simple, où le terme constant ne se distingue plus des autres :

$$(I.3) \quad G(t-t_j) = q \Delta\nu \sum_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi \nu_n(t-t_j).$$

Nous mentionnerons enfin une dernière forme commode sous laquelle peut être mis ce développement, si l'on remarque que l'on a

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \sin 2\pi \nu_n(t-t_j) = 0$$

(les termes de fréquences opposées s'annulant deux à deux).

On joindra à la série (I.3) une deuxième série de ce type, ce qui donne

$$(I.4) \quad \begin{aligned} G(t-t_j) &= q \Delta\nu \sum_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi \nu_n(t-t_j) \\ &\quad + q \Delta\nu \sum_{-\infty}^{+\infty} j \sin 2\pi \nu_n(t-t_j) \\ &= q \Delta\nu \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{j 2\pi \nu_n(t-t_j)}. \end{aligned}$$

Si l'on fait tendre T vers l'infini, on voit que les différences finies $\Delta\nu$ deviennent des différentielles $d\nu$. Les sommations doivent alors être remplacées par

⁽²⁾ On a choisi cette appellation, car la représentation graphique de la fonction $\int_{-\infty}^t E(t)dt$, primitive de la fonction impulsive $E(t)$, a la forme d'un échelon ou d'une marche d'escalier de hauteur q .

des intégrations, et l'on passe naturellement d'une suite discrète de fonctions trigonométriques à une suite continue.

Ce passage à la limite est nécessaire lorsque la mémoire du système sur lequel agit le choc ne s'annule jamais complètement, par exemple lorsqu'elle décroît asymptotiquement avec le temps

c. *Spectre d'amplitude d'une impulsion, impulsion réduite, impulsion filtrée.* — Reprenant la série trigonométrique

$$G(t - t_j) = q \Delta \nu \sum_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi \nu_n (t - t_j),$$

avec

$$\nu_n = \frac{n}{T}, \quad \Delta \nu = \frac{1}{T},$$

nous voyons que le spectre, obtenu en portant en abscisse la fréquence de chaque harmonique et en ordonnée l'amplitude correspondante, est formé d'une succession de raies de même longueur $q\Delta\nu$, distantes de $\Delta\nu$.

Si l'intervalle de répétition T tend vers l'infini, $\Delta\nu$ et $q\Delta\nu$ tendent vers zéro. Le spectre vient se confondre avec l'axe des abscisses, mais si nous portons en ordonnée q au lieu de $q\Delta\nu$, les raies gardent une longueur constante et le spectre de raies se transforme, à la limite, en un spectre continu.

Le spectre d'amplitude d'une impulsion, ainsi défini, a donc la forme très simple représentée sur la figure 2, c'est une bande indéfinie de hauteur q .

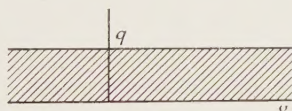


Fig. 2.

Supposons que l'impulsion traverse un filtre :

Nous supposons que la bande des fréquences comprises entre deux valeurs limites ν_1 et ν_2 ne subit aucune modification d'amplitude et de phase, tandis que les autres fréquences sont arrêtées.

Le spectre de l'impulsion transmise est donc réduit à la bande rectangulaire représentée sur la figure 3. L'impulsion transmise est une nouvelle fonction du temps bien connue dont l'enveloppe est représentée sur la figure 4.

Une impulsion, ainsi déduite du choc initial par simple découpage de sa bande spectrale sera appelée « impulsion réduite ». L'influence d'un filtre sera généralement plus compliquée : il modi-

fiera à la fois l'amplitude et la phase des diverses composantes spectrales admises à l'entrée.

Tenant compte de ce que les harmoniques de l'impulsion initiale situés nettement en dehors de la bande passante ne jouent aucun rôle, on voit que l'on pourra toujours déterminer la « réponse » en remplaçant cette impulsion initiale par une « impulsion réduite ».

La largeur du spectre de l'impulsion réduite

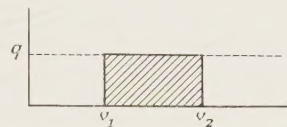


Fig. 3.

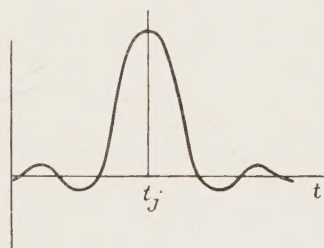


Fig. 4.

d'entrée devra être évidemment du même ordre que la largeur de bande du système pendulaire considéré.

Cette remarque nous servira par la suite, car nous aurons affaire à des systèmes sélectifs du type pendulaire amorti, dont nous déterminerons la réponse en remplaçant l'impulsion initiale par une « impulsion initiale réduite ».

d. *Impulsion paire, impulsion impaire.* — Suivant une méthode préconisée par Rice, il est commode, pour caractériser l'effet d'un choc sur un système pendulaire, de décomposer ce choc en deux parties que nous appellerons « impulsion paire » et « impulsion impaire ».

L'impulsion paire et l'impulsion impaire sont deux oscillations en quadrature (la première du type cos, la deuxième du type sin), modulées par des fonctions $X(t)$ et $Y(t)$ lentement variables du type « impulsion réduite ».

Cette dernière propriété provient de ce que le système sur lequel agit le choc a une faible largeur de bande, et l'on peut par suite remplacer l'impulsion donnée par un choc réduit. Plus cette largeur est faible, plus $X(t)$ et $Y(t)$ varient lentement avec le temps.

Il est facile d'obtenir les deux composantes, paire et impaire, du choc en groupant convenablement les termes de son développement de Fourier.

Soit ν_0 la fréquence centrale de la bande spectrale rectangulaire qui caractérise l'impulsion réduite d'attaque, cette bande s'étendant de la fréquence ν_1 à la fréquence ν_2 .

Le développement de Fourier correspondant sera :

$$G(t - t_j) = q \Delta \nu \sum_{\nu_1}^{\nu_2} \cos 2\pi \nu_n (t - t_j),$$

avec

$$\nu_n = \frac{n}{T}, \quad \Delta \nu = \frac{1}{T}, \quad T \rightarrow \infty.$$

Il est facile de voir que l'on a, en mettant en évidence les termes dont les fréquences sont symétriques par rapport à ν_0 ,

$$G(t - t_j) = q \Delta \nu \sum_{\nu=0}^{\nu=\nu_0-\nu_1} [\cos 2\pi (\nu_0 - \nu)(t - t_j) + \cos 2\pi (\nu_0 + \nu)(t - t_j)],$$

ce que l'on peut écrire sous la forme

$$G(t - t_j) = 2q \Delta \nu \left[\sum_{\nu=0}^{\nu=\nu_0-\nu_1} \cos 2\pi \nu (t - t_j) \right] \times \cos 2\pi \nu_0 (t - t_j)$$

ou, en développant le facteur $\cos 2\pi \nu_0 (t - t_j)$.

$$\begin{aligned} G(t - t_j) = & 2q \Delta \nu \cos 2\pi \nu_0 t_j \\ & \times \left[\sum_{\nu=0}^{\nu=\nu_0-\nu_1} \cos 2\pi \nu (t - t_j) \right] \cos 2\pi \nu_0 t \\ & + 2q \Delta \nu \sin 2\pi \nu_0 t_j \\ & \times \left[\sum_{\nu=0}^{\nu=\nu_0-\nu_1} \cos 2\pi \nu (t - t_j) \right] \sin 2\pi \nu_0 t. \end{aligned}$$

Le résultat final sera plus facile à interpréter si nous changeons les limites des sommations qui figurent dans l'expression ci-dessus. Il vient alors :

$$\begin{aligned} G(t - t_j) = & q \Delta \nu \cos 2\pi \nu_0 t_j \\ & \times \left[\sum_{\nu=-(\nu_0-\nu_1)}^{\nu=\nu_0-\nu_1} \cos 2\pi \nu (t - t_j) \right] \cos 2\pi \nu_0 t \\ & + q \Delta \nu \sin 2\pi \nu_0 t_j \\ & \times \left[\sum_{\nu=-(\nu_0-\nu_1)}^{\nu=\nu_0-\nu_1} \cos 2\pi \nu (t - t_j) \right] \sin 2\pi \nu_0 t. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant poser :

$$\begin{aligned} X(t) &= q \Delta \nu \cos 2\pi \nu_0 t_j \left[\sum_{\nu=-(\nu_0-\nu_1)}^{\nu=\nu_0-\nu_1} \cos 2\pi \nu (t - t_j) \right], \\ Y(t) &= q \Delta \nu \sin 2\pi \nu_0 t_j \left[\sum_{\nu=-(\nu_0-\nu_1)}^{\nu=\nu_0-\nu_1} \cos 2\pi \nu (t - t_j) \right]. \end{aligned}$$

Ces deux fonctions représentent bien des chocs réduits au temps t_j , comme nous l'avions annoncé plus haut; elles varient donc d'autant plus lentement que leur bande spectrale est plus courte.

1° La bande spectrale de chacun de ces chocs réduits composants a pour largeur $2(\nu_0 - \nu_1)$. C'est précisément la largeur de la bande du choc réduit résultant, initialement donné.

2° La bande spectrale de chacun des chocs réduits composants admet pour fréquence centrale $\nu = 0$. Les courbes représentant $X(t)$ et $Y(t)$ sont classiques.

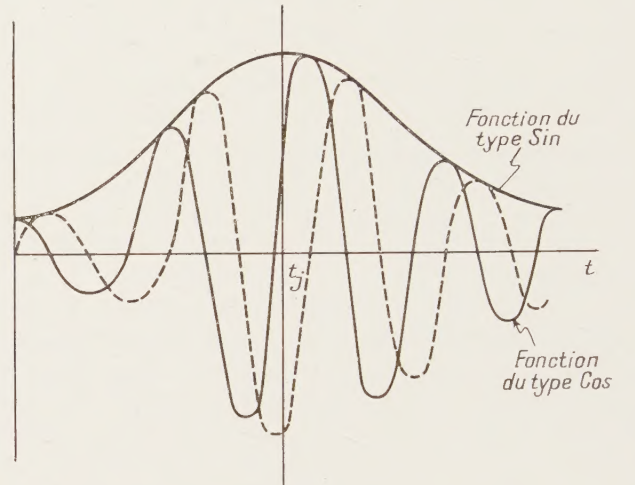


Fig. 5.

On peut généralement leur substituer des « courbes en cloche » du type de Gauss (fig. 5).

3° Si l'on appelle échelons de ces chocs réduits les échelons qu'auraient les chocs correspondants non réduits (obtenus en étendant les sommations ci-dessus de $-\infty$ à $+\infty$), on voit que $X(t)$ et $Y(t)$ ont pour échelons respectifs $q \cos 2\pi \nu_0 t_j$ et $q \sin 2\pi \nu_0 t_j$ tandis que le choc réduit résultant a pour échelon q .

B. LA « RÉPONSE » D'UN SYSTÈME LINÉAIRE A UN CHOC. — On appelle « système linéaire » tout système physique dont l'évolution peut être décrite au moyen d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. C'est le cas du pendule grave tant que son amplitude est faible, du circuit oscillant classique à self, capacité, résistance, etc.

L'étude des systèmes linéaires est bien connue. Il est cependant utile de résumer ici quelques-unes de leurs propriétés afin d'en tirer des méthodes qui permettront d'aborder le cas de systèmes à loi non linéaire.

Nous nous intéresserons d'abord au mouvement provoqué par une impulsion. Il sera ensuite simple

de déterminer l'action d'impulsions en nombre quelconque engendrées par une source de bruit.

a. *Étude directe de l'excitation par un choc.* — Considérons pour fixer les idées le circuit oscillant à self, capacité, résistance série (L , C , r) de la figure 6.

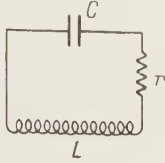


Fig. 6.

On suppose que la tension aux plaques du condensateur, choisie comme variable, oscille librement suivant une loi pseudo-sinusoidale très lentement amortie, de la forme

$$V = a(t) \sin \omega_0 t,$$

avec

$$a(t) = a_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

(a_0 , amplitude au temps $t = 0$; τ , constante de temps du circuit).

Une impulsion, produite par exemple par un saut électronique dans la résistance r , entraîne une modification instantanée de l'amplitude en même temps qu'un petit déphasage. La fréquence n'est pas affectée, puisqu'elle est rigidement liée à L et à C .

Les variations d'amplitude Δa et de phase $\Delta \varphi$, entraînées par le choc, seront aisément calculées (appendice I) en écrivant que ce dernier produit une discontinuité de la vitesse $\frac{dI}{dt}$ sans modifier V .

On trouve ainsi, en supposant que le choc est très faible à côté de l'amplitude d'oscillation libre, et en conservant seulement les parties principales de Δa et de $\Delta \varphi$:

$$(I.5) \quad \Delta a = -q \omega_0 \cos \omega_0 t_j,$$

$$(I.6) \quad a \Delta \varphi = -q \omega_0 \sin \omega_0 t_j,$$

t_j désignant l'instant du choc, q son échelon, a l'amplitude de l'oscillation juste avant le choc.

Les expressions (I.5) et (I.6) nous conduisent aux remarques suivantes :

Remarque 1. — 1° Si l'instant t_j auquel est produit le choc est de la forme $t_j = kT_0$ (k , nombre entier), et coïncide par conséquent avec un point d'élongation nulle, on a

$$\sin \omega_0 t_j = 0, \quad \text{donc} \quad \Delta \varphi = 0.$$

Le choc entraîne la variation d'amplitude $\Delta a = q \omega_0$ sans modification de phase.

2° Si l'instant t_j est de la forme $t_j = \frac{T_0}{4} + kT_0$, et coïncide avec un point d'élongation maximum, on a

$$\cos \omega_0 t_j = 0, \quad \text{donc} \quad \Delta a = 0.$$

Le choc entraîne la variation de phase $\Delta \varphi = -\frac{q \omega_0}{a}$ sans modification d'amplitude.

3° Si l'instant t_j est quelconque, le choc naturel entraîne à la fois une variation d'amplitude et une variation de phase. On peut donc le remplacer par deux chocs composants du type précédent :

— Le premier, appliqué au point d'élongation nulle

$$t_{j_1} = k_1 T_0$$

le plus voisin de t_j , produira la même variation d'amplitude que le choc naturel (sans variation de phase). Nous l'appellerons « choc composant watté ».

— Le deuxième, appliqué au point d'élongation maximum

$$t_{j_2} = \frac{T_0}{4} + k_2 T_0$$

le plus voisin de t_j produira la même variation de phase que le choc naturel (sans variation d'amplitude). Nous l'appellerons de même « choc composant déwatté ».

Les expressions (I.5) et (I.6) nous montrent que les échelons de ces deux chocs composants devront être respectivement :

$$q \cos \omega_0 t_j \quad \text{et} \quad q \sin \omega_0 t_j,$$

l'échelon du choc naturel unique étant q .

Ce résultat est à rapprocher de celui qui a été établi à la fin du paragraphe A.d. Nous verrons plus loin, en effet, que les composants pair et impair de Rice ne sont autres que des composants watté et déwatté réduits.

Remarque 2. — Le système sur lequel agit le choc étant linéaire, on peut lui appliquer le principe de superposition des états.

On obtient ainsi simplement la modification de régime entraînée par le choc en superposant, à l'oscillation exponentielle amortie qu'aurait le circuit en l'absence d'impulsion, l'oscillation que produirait l'impulsion d'échelon q infligée au système initialement au repos.

Les deux oscillations sont représentées sur la figure 7.

La remarque 1 nous donne un procédé équivalent. Elle nous montre que l'on peut superposer à l'oscil-

lation non perturbée deux oscillations obtenues comme suit :

— La première, provenant de l'action du choc composant watté sur le circuit initialement au

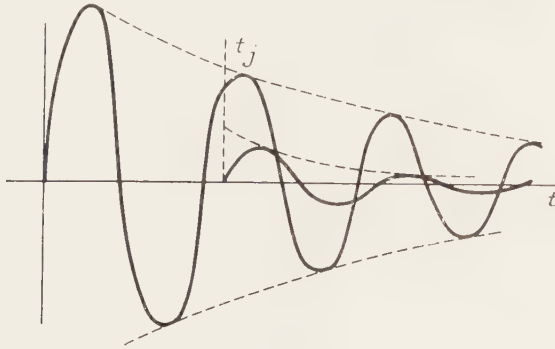


Fig. 7.

repos, est en phase ou en opposition de phase avec l'oscillation non perturbée. Nous l'appellerons « oscillation wattée »;

— La deuxième, provenant de l'action du choc composant déwatté sur le circuit initialement au repos, est en quadrature avance ou retard avec l'oscillation non perturbée. Nous l'appellerons, de même, « oscillation déwattée ».

Les deux oscillations composantes sont représentées sur la figure 8.

On doit noter que les deux oscillations composantes, wattée et déwattée, ainsi que l'oscillation résultant du choc naturel unique, sont ici du même type. Ce sont des oscillations amorties exponentiellement, de même constante de temps et de même pseudo-période que l'oscillation du régime non perturbé.

On introduira encore, lorsque l'oscillateur ne sera

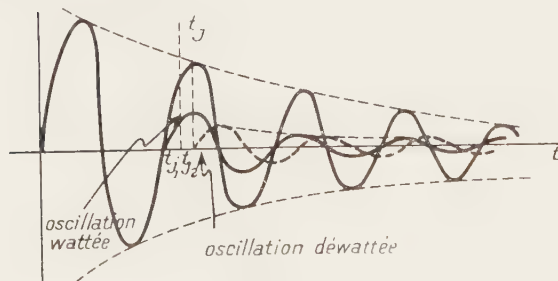


Fig. 8.

plus linéaire, une oscillation wattée et une oscillation déwattée. Nous verrons qu'une différence profonde entre ce dernier cas et le cas linéaire envisagé ici proviendra de ce que ces deux oscillations composantes ne seront plus du même type.

b. Transmission des composantes spectrales du choc. — Le problème résolu au paragraphe précédent (B.a) en conservant à l'impulsion sa personnalité peut être considéré sous un autre angle.

On peut utiliser le développement de Fourier de la fonction impulsive donnée et étudier isolément la transmission de chacune de ses composantes spectrales. On obtient ainsi directement le spectre d'amplitude de la réponse.

L'organe oscillant se comporte comme un filtre. Il modifie suivant des lois caractéristiques l'amplitude et la phase de chacune des raies du spectre d'entrée et il suffit, pour déterminer le spectre de sortie, de remplacer le choc initial par un choc réduit ayant pour largeur de spectre la bande passante du filtre.

c. Détermination graphique du spectre transmis, emploi du diagramme de Nyquist. — L'étude algébrique sera complétée par une méthode graphique

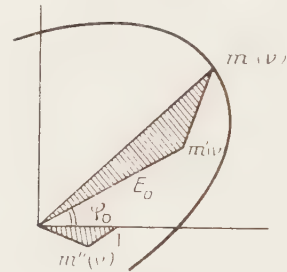


Fig. 9.

utilisant le diagramme de Nyquist du réseau oscillant.

Il serait long de redonner ici la théorie bien connue de Nyquist. Nous la passerons sous silence par souci de clarté [1].

Supposons donc le diagramme tracé sur le plan complexe. Chaque point $m(\nu)$ de cette courbe, image à un paramètre d'un nombre complexe $H(\nu)$ caractéristique du réseau, est lié à une fréquence ν (le paramètre en question). La courbe complète est, par suite, obtenue en balayant toute la gamme des fréquences.

Le choc étant développé en série de Fourier sur un intervalle de répétition $0, T$, nous aurons à déterminer graphiquement les réponses correspondant à chacune des raies spectrales d'entrée.

On utilisera pour cela une construction simple qui permet d'obtenir rapidement l'amplitude et la phase de l'oscillation forcée qui s'établit lorsque le réseau est attaqué par une f.é.m. de fréquence ν donnée

$$E = E_0 \sin(2\pi\nu t + \varphi_0).$$

Nous indiquons ci-dessous les étapes de la construction dont la justification est immédiate (appendice II).

1° On fera correspondre à la f.é.m. d'attaque un point du plan complexe, pour cela :

a. On remplacera la f.é.m. donnée par la f.é.m. complexe

$$E^* = E_0 e^{j\varphi_0} e^{j2\pi\nu_0 t};$$

b. On marquera sur le plan du diagramme l'image $m'(\nu)$ du nombre complexe

$$E_0 e^{j\varphi_0} = z(\nu),$$

2° On construira le point $m''(\nu)$, image du rapport complexe,

$$\frac{z(\nu)}{H(\nu)} \quad [z(\nu), \text{ affixe de } m'(\nu); H(\nu), \text{ affixe de } m(\nu)].$$

L'amplitude et la phase cherchées sont respectivement la longueur du rayon vecteur et l'angle polaire du point $m''(\nu)$.

Lorsque la f.é.m. d'attaque n'est plus sinusoïdale, il suffit d'appliquer à chacun des termes de son développement de Fourier la méthode graphique précédente.

La construction devient particulièrement simple lorsque la f.é.m. est une impulsion donnée à l'origine des temps. Nous avons vu, en effet, que l'amplitude et la phase de tous ses termes de Fourier sont alors indépendants de la fréquence

$$G_1(t) = q \Delta\nu \sum_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi\nu_0 t.$$

Par suite, les points du plan complexe qui représentent ces divers harmoniques, correspondant au même rayon vecteur et au même angle polaire, sont confondus.

En résumé, la méthode consiste à transformer le diagramme de Nyquist point par point par une opération simple, et le spectre de sortie du système est représenté graphiquement par la courbe transformée.

Bien entendu, il faut superposer à la réponse ainsi trouvée, comme dans la méthode algébrique précédente, l'oscillation libre qu'aurait le système en l'absence de choc.

Signalons déjà que la méthode graphique sera adaptée plus loin au cas où le système oscillant n'est plus régi par une loi linéaire. Il suffira de remplacer le diagramme de Nyquist précédent par le diagramme de Nyquist mobile dont nous

avons indiqué la définition et les principales propriétés dans un travail antérieur [1].

d. « Réponse paire » et « réponse impaire ». — Nous utiliserons maintenant la décomposition du choc, suivant la méthode de Rice, en une « impulsion paire » et une « impulsion impaire » (§ A.d).

L'équation qui représente l'effet du choc sur le système peut être écrite, pour l'exemple simple envisagé, sous la forme :

$$(1.7) \quad LC \frac{d^2 V}{dt^2} + rC \frac{dV}{dt} + V = G(t - t_j),$$

$G(t - t_j)$ représentant la fonction impulsive donnée au temps t_j .

Les composantes paire et impaire de cette impulsion sont, en choisissant pour fréquence privilégiée la fréquence $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ de l'oscillation libre du circuit (§ A.d)

$$\begin{aligned} G_1(t - t_j) &= Y(t - t_j) \cos 2\pi\nu_0 t, \\ G_2(t - t_j) &= Y(t - t_j) \sin 2\pi\nu_0 t. \end{aligned}$$

La réponse du système à l'impulsion naturelle $G(t - t_j)$ sera obtenue, puisque le système est linéaire, en superposant les effets produits séparément par $G_1(t - t_j)$ et $G_2(t - t_j)$.

L'équation (1.7) devra donc être remplacée par l'ensemble des deux équations

$$(1.8) \quad LC \frac{d^2 V_1}{dt^2} + rC \frac{dV_1}{dt} + V_1 = G_1(t - t_j),$$

$$(1.9) \quad LC \frac{d^2 V_2}{dt^2} + rC \frac{dV_2}{dt} + V_2 = G_2(t - t_j).$$

On vérifie aisément (appendice III) que V_1 et V_2 sont, comme $G_1(t - t_j)$ et $G_2(t - t_j)$, deux oscillations en quadrature (des types sin et cos) modulées par des fonctions $\xi(t - t_j)$ et $\eta(t - t_j)$ lentement variables.

Il est important de noter, d'ailleurs, qu'à l'impulsion paire $G_1(t - t_j)$ correspond une solution impaire V_1 de l'équation (1.8), de la forme

$$V_1 = \xi(t - t_j) \sin 2\pi\nu_0 t,$$

tandis qu'à l'impulsion impaire $G_2(t - t_j)$ correspond une solution paire V_2 , de l'équation (1.9), de la forme

$$V_2 = \eta(t - t_j) \cos 2\pi\nu_0 t.$$

Il est, par suite, plus logique d'intervertir les indices 1 et 2 :

L'indice 1 et la lettre ξ seront réservés à une oscillation paire, et l'indice 2 et la lettre η à une oscillation impaire.

Nous réécrivons donc les équations (I.8) et (I.9) sous la forme :

$$(I.10) \quad LC \frac{d^2 I_2}{dt^2} + rC \frac{dI_2}{dt} + I_2 = G_1(t - t_j),$$

$$(I.11) \quad LC \frac{d^2 I_1}{dt^2} + rC \frac{dI_1}{dt} + I_1 = G_2(t - t_j),$$

avec

$$I_1 = \xi(t - t_j) \cos 2\pi\nu_0 t, \\ I_2 = \eta(t - t_j) \sin 2\pi\nu_0 t.$$

L'oscillation complète du système après le choc sera obtenue, comme plus haut, en superposant à l'oscillation $V_1 + V_2$ ainsi déterminée, l'oscillation libre qu'aurait le circuit en l'absence d'impulsion.

Nous concluons cette première partie, réservée à l'étude de la fonction impulsive originelle et de la « réponse » d'un système linéaire à une impulsion, par une *remarque très importante pour la suite*.

Nous avons été amené à introduire, par deux procédés différents, une décomposition de l'impulsion naturelle unique en deux impulsions composantes dont l'effet couplé est équivalent.

La méthode de Rice (§A.d) nous a conduit à définir une « impulsion paire » $G_1(t - t_j)$ et une « impulsion impaire » $G_2(t - t_j)$.

L'action d'un choc sur un système linéaire (§B.a, remarque 1) nous a conduit, de même, à une « impulsion wattée » et à une « impulsion déwattée » (infligées au système aux temps $t_{j1} = kT_0$ et $t_{j2} = \frac{T_0}{4} + kT_0$, T_0 étant la période du signal théorique).

Il est facile de se rendre compte que l'impulsion paire $G_1(t - t_j)$ peut être remplacée, à une approximation du second ordre, par

$$G_1(t - t_j) = A(t - t_j) \cos 2\pi\nu_0 t.$$

En effet, cette assimilation n'affecte que l'enveloppe de l'oscillation qui subit une translation, parallèle à l'axe des temps, d'autant plus petite que t_j est plus voisin de t_{j1} , c'est-à-dire que la fréquence d'oscillation est plus grande.

Il suffit de se reporter à la figure 5 pour voir que le résultat est intuitif.

De même, l'impulsion impaire $G_2(t - t_j)$ peut être remplacée par

$$G_2(t - t_j) = B(t - t_{j2}) \sin 2\pi\nu_0 t.$$

Dans ces conditions, l'impulsion paire $G_1(t - t_{j1})$ et l'impulsion wattée appliquée au temps t_{j1} sont identiques, ainsi que l'impulsion impaire $G_2(t - t_{j2})$ et l'impulsion déwattée appliquée au temps t_{j2} , à cela près que les impulsions paire et impaire de

Rice sont des impulsions wattée et déwattée *réduites*.

Les réponses V_1 et V_2 se confondent alors avec les oscillations déwattée et wattée représentées sur la figure 8.

2. Propriétés statistiques du bruit de fond.

a. *Oscillogramme de bruit.* — Considérons, pour fixer les idées, la source de bruit qu'est une simple résistance morte. On sait qu'entre ses extrémités apparaît, par suite de l'agitation thermique désordonnée des électrons internes, une f.é.m. $E(t)$ dont la variation au cours du temps est très irrégulière.

Si l'on enregistre l'évolution rapide de $E(t)$, on obtient un oscillogramme (fig. 10) dont l'aspect

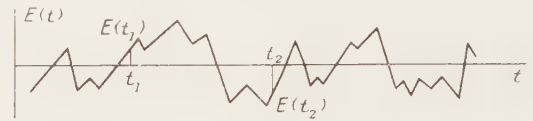


Fig. 10.

conduit aux remarques suivantes, qui résument les principales caractéristiques du bruit de fond :

1° La fonction $E(t)$ ne présente aucune périodicité.

2° Connaissant la valeur $E(t_1)$ de la f.é.m. à un instant t_1 , il est impossible de prédire la valeur $E(t_2)$ que prendra la f.é.m. à un autre instant t_2 .

$E(t_1)$ et $E(t_2)$ sont deux valeurs de la f.é.m. sans relation entre elles. Elles sont dites « non corrélées ».

3° $E(t)$ a autant de chances de prendre une valeur positive donnée que la valeur opposée. Il s'ensuit que sa « moyenne dans le temps » définie par l'expression

$$\overline{E(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E(t) dt$$

est nulle.

Notons cependant que, si l'on place en série avec la résistance une f.é.m. constante, l'oscillogramme est déplacé verticalement par translation et la moyenne $\overline{E(t)}$ a une valeur non nulle : la f.é.m. constante donnée.

Les propriétés 1°, 2° et 3° sont alors valables pour la partie fluctuante $E(t) - \overline{E(t)}$ de $E(t)$.

b. *Caractère stationnaire de la fonction de bruit.* — S'il est impossible de prédire la valeur que prendra la fonction $E(t)$ à un instant futur, on peut du moins évaluer la probabilité pour qu'elle ait, à cet instant, une valeur E_n avec une plage d'erreur dE_n .

Soit $P(E_n)$ cette probabilité. $P(E_n)$ dépend

évidemment de E_n , on l'appelle « loi de distribution » ou « densité de probabilité ».

On parlera souvent aussi de la « valeur moyenne » de $E(t)$; précisons ce que l'on entend exactement par là :

Supposons que nous déterminions $E(t)$ tous les jours, à la même heure, cette grandeur prendra en p jours consécutifs les valeurs $E_1, E_2, E_3, \dots, E_p$.

Sa valeur moyenne ou *espérance mathématique* est la limite de

$$M_p(E_p) = \frac{E_1 + E_2 + \dots + E_p}{p} \quad \text{quand } p \rightarrow \infty.$$

On peut aussi suivre de façon continue les variations au cours du temps de $E(t)$ pendant une durée T aussi longue que possible, et construire un oscillogramme.

La *moyenne temporelle* est alors définie comme limite de

$$M_T[E(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T E(t) dt \quad \text{quand } T \rightarrow \infty.$$

Les deux définitions sont généralement distinctes.

Tandis que la moyenne temporelle ne renferme plus la variable t , l'espérance mathématique d'une variable aléatoire peut, au contraire, dépendre de l'instant auquel sont effectuées les mesures.

Dans l'exemple choisi, cependant, les qualités statistiques de la variable sont indépendantes de l'instant considéré. L'espérance mathématique est alors indépendante du temps, et l'on montre qu'elle se confond avec la moyenne temporelle [cette moyenne sera notée $\overline{E(t)}$].

Les grandeurs aléatoires présentant cette propriété sont appelées « variables aléatoires stationnaires » et les deux définitions de la moyenne se confondent dans ce cas.

On vérifie facilement que la moyenne d'une variable aléatoire stationnaire, de la forme $f(E)$ par exemple, est liée à la loi de distribution $P(E)$ par la relation importante

$$\overline{f(E)} = \int_0^\infty f(E) \cdot P(E) dE.$$

Nous rencontrerons fréquemment par la suite les expressions suivantes :

$\overline{E(t)}$, moyenne de $E(t)$, ou *courant direct* de l'oscillogramme;

$\overline{E^2(t)}$, *carré moyen* de $E(t)$;

$E(t) - \overline{E(t)}$, écart à la moyenne, ou *fluctuation* de $E(t)$;

$[E(t) - \overline{E(t)}]^2$, *carré moyen de la fluctuation* de $E(t)$.

c. *Fonction de corrélation de $E(t)$* . — La variation de $E(t)$ n'est pas toujours aussi anarchique que nous l'avons supposé au début. Le plus souvent, au contraire, les valeurs $E(t_2)$ et $E(t_1)$ correspondant à deux instants voisins ne sont pas *absolument indépendantes*. On est alors amené à préciser l'intervalle limite au delà duquel cesse, en moyenne, la corrélation de $E(t_1)$ et $E(t_2)$. Cet intervalle est appelé « intervalle de corrélation λ_0 ».

Cela revient à dire que $E(t) E(t + \lambda)$ est, en moyenne, différent de zéro tant que λ est inférieur à λ_0 , et identiquement nul lorsque λ est supérieur à l'intervalle de corrélation λ_0 .

On introduit ainsi la fonction

$$\overline{E(t+\lambda) E(t)} = \overline{E(t) E(t+\lambda)}$$

appelée « fonction de corrélation de $E(t)$ ».

d. *Développement de Fourier de l'oscillogramme de bruit*. — La f.é.m. de bruit ne présente aucune périodicité. On peut cependant, comme pour la fonction impulsive déjà étudiée, introduire une périodicité fictive.

Soit T la durée d'enregistrement d'un oscillogramme de bruit, un jour par exemple. La même expérience répétée le jour suivant redonnera certainement un oscillogramme différent. On ne modifie cependant nullement les propriétés de l'oscillogramme enregistré un certain jour en imaginant que l'expérience effectuée le jour suivant redonne un oscillogramme parfaitement identique. Cette hypothèse gratuite a l'avantage de faire apparaître un intervalle de répétition T . Elle permet donc la décomposition du motif périodique en série de fonctions trigonométriques.

Donnons quelques formes utiles du développement d'un oscillogramme de durée T (intervalle de répétition T) :

1° Somme de fonctions trigonométriques réelles à fréquences positives :

$$E(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{T} \cos(2\pi \nu_n t - \varphi_n) \quad \left(\nu_n = \frac{n}{T} \right);$$

2° La même série où l'on a développé les fonctions trigonométriques en sommes de sin et de cos :

$$E(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{T} \cos 2\pi \nu_n t + \frac{B_n}{T} \sin 2\pi \nu_n t,$$

avec

$$\nu_n = \frac{n}{T},$$

$$A_n = C_n \cos \varphi_n,$$

$$B_n = C_n \sin \varphi_n;$$

3° Somme de fonctions trigonométriques réelles à fréquences positives ou négatives :

$$E(t) = \sum_n \frac{1}{2} \frac{C_n}{T} \cos(2\pi \nu_n t - \varphi_n);$$

4° Somme d'exponentielles complexes (fréquences positives ou négatives) :

$$E(t) = \sum_n \frac{1}{2} \frac{C_n}{T} e^{i(2\pi \nu_n t - \varphi_n)}.$$

Les coefficients doivent être déterminés pour chaque oscillogramme particulier : toutes les fois que l'on enregistre un oscillogramme différent de durée T , on obtient en effet un lot de valeurs C_n et φ_n , ou A_n et B_n différent. C_n et φ_n , ainsi que A_n et B_n sont des couples de coefficients aléatoires, qui vérifient

$$A_n = B_n = 0, \\ \overline{A_n^2} = \overline{B_n^2} = \frac{C_n^2}{2}.$$

Les composants de Fourier de l'oscillogramme émis par la source sont uniformément répartis sur toute la gamme des fréquences. Cependant, les bruits observés en pratique sont toujours transmis par des organes radioélectriques de bande passante donnée, qui arrêtent les harmoniques situés en dehors de cette bande. Le bruit pur originel apparaît donc comme une limite théorique inobservable, que l'on doit toujours remplacer, dans les cas réels, par un bruit à bande limitée.

e. Puissance de bruit. — Supposons que la f.é.m. de bruit $E(t)$ (exprimée en volts) soit appliquée aux extrémités d'une résistance de 1Ω . Elle y dépenserait pendant un instant très court dt l'énergie instantanée $E^2(t) dt$ joules, ou la puissance instantanée $E^2(t)$ watts. Il sera commode d'assimiler toujours de cette façon le carré de la f.é.m. de bruit à une puissance instantanée, que nous appellerons *puissance réduite instantanée*.

La *puissance efficace* de l'oscillogramme de bruit est alors la puissance mesurée au moyen d'un wattmètre thermique de résistance unité. C'est donc la moyenne temporelle de $E^2(t)$ prise sur la durée T de l'expérience. Comme on l'a vu, cette moyenne temporelle se confond ici avec l'espérance mathématique de $E(t)$.

Si $E(t)$ a un courant direct non nul $E_{cd} = \overline{E(t)}$, une partie de la puissance réduite moyenne est due à ce courant direct. Une autre partie provient des variations irrégulières de $E(t)$ autour de cette valeur moyenne (fig. 11).

Mettons, en effet, en évidence le courant direct E_{cd} , et la partie variable de $E(t)$

$$E(t) = E_{cd} + [E(t) - E_{cd}],$$

la puissance réduite moyenne a pour valeur

$$\overline{E^2(t)} = E_{cd}^2 + 2E_{cd} \overline{[E(t) - E_{cd}]} + \overline{[E(t) - E_{cd}]^2}$$

ou, plus simplement, puisque l'on a $\overline{E(t) - E_{cd}} = 0$,

$$\overline{E^2(t)} = E_{cd}^2 + \overline{[E(t) - E_{cd}]^2},$$

E_{cd}^2 , est la puissance réduite dépensée par la tension constante E_{cd} ;

$\overline{[E(t) - E_{cd}]^2}$, carré moyen de la fluctuation de $E(t)$,

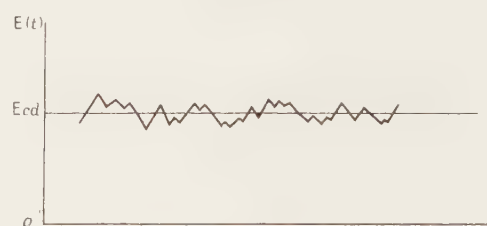


Fig. 11.

représente la puissance dépensée par la partie variable de la tension $E(t)$.

f. Spectre de puissance de l'oscillogramme de bruit. — Voyons maintenant quelle est la contribution apportée à la puissance réduite moyenne par chacun des composants de Fourier.

Reprenons pour cela le développement d'un oscillogramme particulier de durée T . Pour la clarté de l'exposé, nous utiliserons la forme qui ne fait intervenir que des fréquences positives :

$$E(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{T} \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t - \varphi_n\right).$$

La puissance instantanée dépensée par la partie variable de cet oscillogramme est

$$[E(t) - C_0]^2 = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{T} \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t - \varphi_n\right) \right]^2$$

ou, en développant le carré du second membre

$$\begin{aligned} [E(t) - C_0]^2 = & \sum_n \frac{C_n^2}{T^2} \cos^2\left(\frac{2\pi n}{T} t - \varphi_n\right) \\ & + \sum_{p \neq q} \frac{C_p C_q}{T^2} \cos\left(\frac{2\pi p}{T} t - \varphi_p\right) \\ & \times \cos\left(\frac{2\pi q}{T} t - \varphi_q\right). \end{aligned}$$

La puissance efficace dépensée par un terme de la forme

$$\frac{C_n^2}{T^2} \cos^2 \left(\frac{2\pi n t}{T} - \varphi_n \right)$$

vaut $\frac{1}{2} \frac{C_n^2}{T^2}$.

La puissance efficace dépensée par un terme de la forme :

$$\left[\frac{C_p C_q}{T^2} \cos \left(\frac{2\pi p}{T} t - \varphi_p \right) \cos \left(\frac{2\pi q}{T} t - \varphi_q \right) \right]_{p=q}$$

est nulle.

Par conséquent, la puissance efficace dépensée par l'oscillogramme de bruit précédent se réduit à

$$\sum_n \frac{1}{2} \frac{C_n^2}{T^2}$$

Prenant alors la moyenne, pour un grand nombre d'oscillogrammes différents de même durée T , nous trouvons pour puissance réduite moyenne :

$$\sum_n \frac{1}{2} \frac{C_n^2}{T^2}$$

Cette formule simple montre que la puissance moyenne de bruit est la somme des puissances réduites moyennes dépensées par chacun des composants de Fourier.

Si l'on porte sur un graphique, en abscisse les fréquences des harmoniques successifs, distants de $\Delta\nu = \frac{1}{T}$, en ordonnée les puissances réduites moyenne $\frac{1}{2} \frac{C_n^2}{T^2}$ de ces harmoniques, on obtient un spectre de puissance du bruit. Il est constitué par une succession de raies équidistantes.

Si l'intervalle de répétition T tend vers l'infini, $\Delta\nu = \frac{1}{T}$ et $\frac{1}{2} \frac{C_n^2}{T^2}$ tendent vers zéro. Le spectre vient se confondre avec l'axe des abscisses.

Pour éviter cette dégénérescence, on choisit des ordonnées proportionnelles à $\frac{1}{2} \frac{C_n^2}{T^2}$ dont la valeur reste constante quand $T \rightarrow \infty$:

$$\bar{C}_n^2 = \frac{1}{2} \frac{C_n^2}{T}$$

remplit bien cette condition, car $\bar{C}_n^2$ est un infiniment grand du même ordre que T .

Ainsi, lorsque $T \rightarrow \infty$, les raies gardent une longueur constante et se rapprochent les unes des autres, formant à la limite un spectre continu.

Remarque 1. — Dans le cas du bruit pur originel,

la théorie de Nyquist permet d'exprimer $\frac{1}{2} \frac{C_n^2}{T}$ en fonction de la résistance génératrice r , et de sa température absolue T_K on a

$$\frac{1}{2} \frac{C_n^2}{T} = 4krT_K,$$

k , constante de Boltzmann.

Remarque 2. — Dans le cas général (bruit originel ou bruit transmis par un système), la puissance réduite moyenne d'une bande, limitée par les fréquences extrêmes ν_1 et ν_2 , est mesurée par la surface du spectre de puissance précédent comprise entre ν_1 et ν_2 . Elle vaut :

$$\int_{\nu_1}^{\nu_2} \bar{C}_n^2 d\nu$$

ou, pour le bruit à la source,

$$\int_{\nu_1}^{\nu_2} 4krT_K d\nu.$$

Remarque 3. — La formule ci-dessus nous montre que si la largeur de bande $\nu_2 - \nu_1$ tend vers l'infini, la puissance réduite du bruit à la source tend, elle aussi, vers l'infini, mais ce cas théorique est sans intérêt, puisque la largeur de bande est toujours limitée par des systèmes sélectifs.

g. Relation entre la fonction de corrélation $\bar{\Psi}(\lambda)$ et le spectre de puissance du bruit. — La fonction de corrélation de l'oscillogramme de bruit est simplement reliée au développement de Fourier de $E(t)$

$$E(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{T} \cos \left(\frac{2\pi n}{T} t - \varphi_n \right)$$

(intervalle de répétition 0, T).

En effet, si nous développons le produit

$$E(t) E(t + \lambda) = \left\{ C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{T} \cos \left(\frac{2\pi n}{T} t - \varphi_n \right) \right\} \left\{ C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{T} \cos \left[\frac{2\pi n}{T} (t + \lambda) - \varphi_n \right] \right\}$$

et si nous prenons sa moyenne en tenant compte de la non-corrélation des divers harmoniques, nous trouvons

$$\bar{\Psi}(\lambda) = E(t) E(t + \lambda) = C_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^2}{T^2} \cos \frac{2\pi n}{T} \lambda.$$

On obtient ainsi rapidement le développement de Fourier de $\bar{\Psi}(\lambda)$, et l'on voit clairement que le coefficient de son $n^{\text{ième}}$ harmonique est la puissance

sance $\frac{1}{2} \frac{C_n^2}{T^2}$ dépensée par le $n^{\text{ième}}$ harmonique du bruit $E(t)$.

Cette propriété, qui permet de déduire le spectre de puissance du bruit de sa fonction de corrélation, est d'un grand intérêt. Il est plus facile, en effet, dans certains cas, de déterminer la fonction de corrélation $\overline{\psi(\lambda)}$ et son développement de Fourier que le développement de Fourier de $E(t)$.

h. Décomposition de l'oscillogramme par la méthode de Rice. — Dans tous les problèmes où le bruit se superpose à un signal

$$S = a_0 \sin 2\pi\nu_0 t;$$

il est particulièrement commode de décomposer l'oscillogramme de bruit suivant la méthode de Rice.

Cette méthode consiste à remplacer l'oscillogramme donné par deux oscillogrammes composants modulant des sinusoïdes porteuses, l'une en phase, l'autre en quadrature avec le signal, de fréquence ν_0 (celle du signal).

On y parvient en remarquant que chaque terme de Fourier de la décomposition classique

$$\frac{C_n}{T} \cos(2\pi\nu_n t - \varphi_n)$$

peut être mis sous la forme

$$\begin{aligned} & \frac{C_n}{T} \cos[2\pi(\nu_n - \nu_0)t - \varphi_n] \cos 2\pi\nu_0 t \\ & - \frac{C_n}{T} \sin[2\pi(\nu_n - \nu_0)t - \varphi_n] \sin 2\pi\nu_0 t. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à faire la somme des termes en $\cos 2\pi\nu_0 t$, d'une part et, d'autre part, des termes en $\sin 2\pi\nu_0 t$ y compris le signal.

On voit que l'onde porteuse en phase avec le signal est modulée par un oscillogramme dont la décomposition de Fourier est

$$V(t) = - \sum_n \frac{C_n}{T} \sin[2\pi(\nu_n - \nu_0)t - \varphi_n].$$

L'onde porteuse en quadrature est modulée par l'oscillogramme

$$U(t) = \sum_n \frac{C_n}{T} \cos[2\pi(\nu_n - \nu_0)t - \varphi_n]$$

et l'enveloppe du signal entaché de bruit est

$$R(t) = \sqrt{U^2(t) + V^2(t) + a_0^2}.$$

i. Relation entre les propriétés statistiques et les

propriétés élémentaires. — L'étude des causes du bruit de fond montre que l'oscillogramme précédent est toujours la somme d'effets élémentaires dus à des chocs originels. Un oscillogramme de bruit a donc une « structure grenue » et l'on peut déduire ses propriétés de celles des *motifs originels* qui le constituent. Il serait long d'établir les relations existant entre les propriétés élémentaires et les propriétés statistiques, aussi nous contenterons-nous d'indiquer les plus importantes, dont nous aurons à nous servir plus loin.

Courant direct de l'oscillogramme. Puissance de bruit. Théorèmes de Campbell. — Soit T l'intervalle de répétition de l'oscillogramme et K le nombre moyen de motifs élémentaires $F(t-t_j)$ (que l'on peut supposer identiques et répartis au hasard sans restreindre la généralité des raisonnements) de 0 à T . Le courant direct de l'oscillogramme est égal à K fois la moyenne d'un motif, soit

$$E_{cd} = K \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt.$$

Sa puissance est aussi K fois la puissance moyenne d'un motif.

Fonction de corrélation de l'oscillogramme. — Lorsque l'oscillogramme n'a pas de courant direct, on démontre aisément que la fonction de corrélation moyenne de cet oscillogramme s'obtient en multipliant par K celle d'un motif élémentaire, on a

$$\overline{\psi(\lambda)} = K \frac{1}{T} \int_0^T F(t) F(t+\lambda) dt.$$

Lorsque l'oscillogramme a un courant direct E_{cd} , il suffit d'ajouter à la fonction de corrélation moyenne précédente le carré E_{cd}^2 de ce courant direct.

Composants de Rice de l'oscillogramme. — On voit aussi que les composants de Rice de l'oscillogramme s'obtiennent en sommant les composants de Rice des motifs élémentaires.

II. EFFET DU BRUIT DE FOND SUR LE RÉGIME DES AUTO-OSCILLATEURS NON LINÉAIRES.

Les éléments réunis dans le premier chapitre permettent de résoudre la plupart des problèmes usuels concernant le bruit de fond. Nous allons les utiliser pour étudier l'influence du bruit sur le régime d'un oscillateur à lampe.

Nous nous intéresserons surtout au cas où le bruit fait subir à l'oscillation des fluctuations au

voisinage de la stabilisation théorique, qui serait atteinte en l'absence de bruit.

On sait qu'au voisinage de la stabilisation, il n'est plus possible de décrire l'oscillation du système, tout bruit mis à part, par une équation différentielle linéaire, ce qui rend délicate l'application des principes exposés jusque-là. L'oscillateur sera dit alors *non linéaire*.

Il sera cependant intéressant d'établir le parallèle entre l'oscillateur à peu près stabilisé envisagé et le pendule à self, capacité, résistance du premier chapitre.

Notons que l'on passe de façon continue de ce circuit pendulaire à l'auto-oscillateur en introduisant une réaction de plus en plus notable. On diminue ainsi graduellement l'amortissement apparent jusqu'au moment où se produit l'instabilité, c'est-à-dire l'amorçage d'oscillations auto-entretenues.

Supposant ces conditions critiques atteintes, nous verrons que le bruit produit des variations irrégulières de la fréquence, ce qui rend difficile sa définition précise.

D'autre part, l'oscillateur émet, en même temps que le signal qu'on lui demande, un certain « volume » de bruit que l'on ne pourra plus réduire sans détériorer aussi le signal.

1. Les conditions expérimentales.

a. Influence directe ou indirecte des sources de bruit. L'effet du bruit sous sa forme la plus générale. — Considérons d'abord le circuit très simple renfermant une seule lampe, représenté sur le schéma ci-dessous. Deux sources de bruit y sont apparentes.

L'agitation thermique dans la résistance série du circuit oscillant L , C , r ;

L'effet de grenaille de la lampe d'entretien.

Il sera d'ailleurs commode de ramener ces deux effets à un même type en remplaçant la deuxième source par une résistance R_L équivalente indiquée sur le dessin.

Les f.é.m. aléatoires de bruit, engendrées dans r et R_L seront respectivement représentées par les « oscillogrammes » $E(t)$ et $E_L(t)$. De même, les chocs élémentaires qui constituent ces oscillogrammes seront notés $G(t-t_j)$ et $G_L(t-t_k)$.

Pour déterminer la perturbation apportée au régime oscillant, il suffit de remarquer qu'en un point du circuit (au point A de la grille, par exemple) se superposent un signal et un bruit. L'ensemble signal-bruit est amplifié par la lampe sur le parcours (A/B). Il est ensuite transmis au circuit oscillant par le couplage M. Il en résulte une modification du voltage en A par réaction.

Pour connaître l'effet de cette réaction, il convient, en premier lieu, de trouver la relation entre les f.é.m. aléatoires de bruit aux sources, $E(t)$ et $E_L(t)$, et la tension V au point A.

Les équations classiques aux mailles et aux nœuds, jointes à l'équation de la caractéristique courbe de la lampe, mise sous la forme d'un développement limité :

$$i_p = sV + aV^2 + bV^3 \quad (\text{penthode})$$

donnent rapidement cette relation. Nous admettrons, pour simplifier les calculs, que la caractéristique ne renferme pas de terme carré ($a = 0$). Cette hypothèse est valable en pratique pour de nombreux

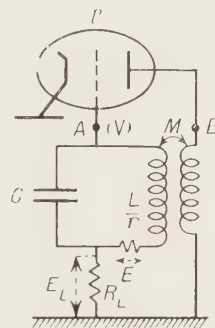


Fig. 1.

oscillateurs, en particulier ceux qui utilisent un montage push-pull ⁽³⁾.

L'effet du bruit sur le potentiel en A est traduit en définitive par l'équation différentielle non linéaire :

$$(11.1) \quad LC \frac{d^2 V}{dt^2} + (Ms + rC + 3MbV^2) \frac{dV}{dt} + 1 = E + \left(1 + LC \frac{d^2}{dt^2} + rC \frac{d}{dt} \right) E_L.$$

Approximation linéaire au voisinage de l'amorçage. — Lorsque l'oscillateur entre en fonctionnement à partir du repos, l'amplitude d'oscillation est d'abord assez faible pour que l'on puisse négliger V^2 . L'équation précédente est, dans ces conditions, approximativement linéaire et l'on voit que, si de plus le bruit de la lampe est négligeable

⁽³⁾ On sait que, dans le cas général, les termes pairs de la caractéristique ne modifient pas la valeur de l'amplitude stabilisée théorique, mais reportent leur effet sur les harmoniques 2, 4, ... De même, on vérifie aisément qu'ils n'affectent pas le spectre de bruit entourant la raie du fondamental, mais qu'ils interviennent dans l'élargissement des raies d'ordre 2, 4, ...

On ne restreint donc pas la généralité des raisonnements en les éliminant.

(ce que nous vérifierons plus loin), elle se réduit à

$$LC \frac{d^2 I}{dt^2} + (Ms + rC) \frac{dI}{dt} + I = E,$$

avec

$$Ms + rC = 0.$$

Ce cas peut être étudié de façon analogue à celui du circuit oscillant à self, capacité, résistance, sans réaction du premier chapitre pour lequel l'équation se réduisait à :

$$LC \frac{d^2 I}{dt^2} + rC \frac{dI}{dt} + I = E.$$

La seule différence provient du signe du terme résistant. La fonction aléatoire $E(t)$ qui constitue l'attaque apparaît au second membre sans aucune altération.

Nous dirons que l'influence de la source de bruit est *directe*.

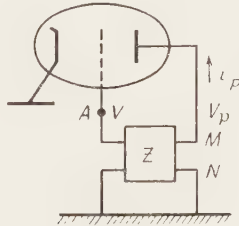


Fig. 13.

Considérons maintenant le cas théorique où $E(t)$ serait nul et où, par suite, le bruit de la lampe $E_L(t)$ ne pourrait être négligé. L'équation générale deviendrait alors :

$$LC \frac{d^2 I}{dt^2} + (Ms + rC) \frac{dI}{dt} + I = \left(1 + LC \frac{d^2}{dt^2} + rC \frac{d}{dt} \right) E_L.$$

Il apparaît clairement que les divers harmoniques de la fonction d'attaque $E_L(t)$ subissent une altération qui dépend de leur fréquence. Par exemple, si l'on utilise la décomposition de $E_L(t)$ en exponentielles complexes, on voit que l'harmonique de pulsation ω a son amplitude multipliée par $1 - LC \omega^2 + j rC \omega$.

Tout se passe comme si le bruit $E_L(t)$ avait été filtré par le circuit avant d'agir sur le système de résistance apparente $\frac{Ms}{C} + r$.

L'influence de la source de bruit sera dite, dans ce cas, *indirecte*.

Généralisons cette propriété. Un oscillateur idéal, supposé exempt de bruit, peut toujours être réduit au schéma simple (fig. 13) comportant :

— Un tube d'entretien ayant la tension de sortie V_p et le courant de sortie i_p , fonction de la tension d'entrée V au point A

$$i_p = f(V);$$

— Un quadripôle passif déphaseur et atténuateur, dont le coefficient de transfert symbolique est Z , tandis que l'impédance symbolique ramenée sur la plaque entre M et N est z ⁽⁴⁾.

Les équations du système oscillant sont :

$$\begin{aligned} V_p &= -z i_p, \\ V &= Z V_p, \\ i_p &= f(V). \end{aligned}$$

On en tire l'équation générale d'oscillation, que l'on peut mettre sous la forme symbolique :

$$V + Z z f(V) = 0$$

et qui exprime que la tension

$$Z V_p = -Z z f(V)$$

est ramenée par réaction à l'entrée.

S'il existe en une région du système une source de bruit, génératrice de la f.é.m. $E(t)$, il faut ajouter au terme $Z V_p = -Z z f(V)$ ramené sur l'électrode d'entrée, un terme ΔV obtenu en multipliant $E(t)$ par un coefficient de transfert convenable.

Aux sources de bruit $E_1(t)$, $E_2(t)$, ... correspondent les coefficients de transfert Z_1 , Z_2 , ... définis par

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= Z_1 E_1(t), \\ \Delta V_2 &= Z_2 E_2(t), \\ &\dots \end{aligned}$$

Le potentiel d'entrée résultant est alors :

$$V = -Z z f(V) + \sum_n Z_n E_n(t)$$

et l'équation complète d'oscillation est

$$(11.2) \quad V + Z z f(V) = \sum_n Z_n E_n(t).$$

Le cas où l'influence de la source est directe est privilégié comme nous le verrons plus loin en appliquant cette équation à quelques oscillateurs.

b. Hypothèse simplificatrice : bruit faible par rapport à l'amplitude du signal. — Lorsque la stabilisation est atteinte, le terme en V^2 n'est plus négli-

⁽⁴⁾ Les définitions d'un coefficient de transfert symbolique et d'une impédance symbolique ont été données dans la référence [1].

geable et l'équation qui exprime l'influence du bruit n'est plus linéaire. Nous devons la conserver sous sa forme générale (II.1).

Une hypothèse simplificatrice, toujours valable en pratique, consistera à considérer le bruit comme ayant une faible importance à côté de l'amplitude du signal émis.

La solution cherchée $V(t)$ du problème avec bruit différera, par suite, très peu de celle qui correspond à un régime non entaché de bruit.

$V_s(t)$ désignant cette dernière, nous admettrons que $V(t)$ s'en déduit par addition d'un terme de perturbation petit, $v(t)$

$$V(t) = V_s(t) + v(t).$$

Portant cette expression dans le premier membre de (II.1), nous trouvons, en négligeant les termes de bruit du second ordre :

$$\begin{aligned} LC \frac{d^2 I_s}{dt^2} + [Ms + rC + 3MbV_s^2] \frac{dI_s}{dt} + I_s \\ + LC \frac{d^2 v}{dt^2} + [Ms + rC + 3MbV_s^2] \frac{dv}{dt} \\ + \left[1 + 6MbV_s \frac{dI_s}{dt} \right] v \\ = E + \left(1 + LC \frac{d^2}{dt^2} + rC \frac{d}{dt} \right) E_L \end{aligned}$$

ou, puisque l'on a par hypothèse

$$\begin{aligned} LC \frac{d^2 V_s}{dt^2} + [Ms + rC + 3MbV_s^2] \frac{dV_s}{dt} + I_s = 0, \\ (II.3) \quad LC \frac{d^2 v}{dt^2} + [Ms + rC + 3MbV_s^2] \frac{dv}{dt} \\ + \left[1 + 6MbV_s \frac{dI_s}{dt} \right] v \\ = E + \left(1 + LC \frac{d^2}{dt^2} + rC \frac{d}{dt} \right) E_L \end{aligned}$$

Cette dernière équation a le gros avantage d'être linéaire par rapport à v , bien que l'oscillateur fonctionne à la stabilisation, c'est-à-dire dans des conditions non linéaires.

L'interprétation physique de ce résultat est facile. Le point représentatif M de l'oscillateur, sur la caractéristique $i_p = f(V)$ de la lampe (V potentiel de grille au point A, *fig. 13* et *14*), balaye autour du point de repos M_0 un arc de courbe étendu PQ.

La courbure de cet arc ne peut être négligée, puisque c'est elle qui entraîne la stabilisation en amplitude du système. L'équation d'oscillation générale est donc obligatoirement non linéaire.

Lorsqu'on ne fait pas intervenir le bruit, on trouve que le point M décrit l'arc PQ suivant une loi sinusoïdale du temps, avec la fréquence d'oscillation du régime, ν_0 .

L'introduction de la source de bruit entraîne, à chaque instant, de légères fluctuations en position de M par rapport aux positions théoriques précédentes.

L'hypothèse d'un bruit faible suppose que ces fluctuations sont très petites. Les portions de l'arc PQ qu'elles affectent peuvent, par suite, être confondues avec de petits segments de droite.

L'équation qui décrit ces fluctuations doit donc être linéaire.

Nous donnerons encore à ce résultat une forme plus générale en utilisant l'équation symbolique (II.2).

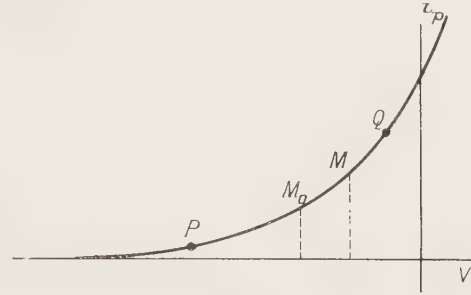


Fig. 14.

Posant toujours

$$V(t) = V_s(t) + v(t),$$

et conservant seulement la partie linéaire du développement de Taylor de $f(V)$

$$f(V) = f(V_s) + v f'(V_s),$$

on peut remplacer l'équation (II.2) par

$$V_s + v + Zz [v f'(V_s) + v f''(V_s) v] = \sum_n Z_n E_n(t).$$

On a, de plus, par hypothèse

$$V_s + Zz f(V_s) = 0.$$

L'équation se réduit donc à

$$v + Zz [v f'(V_s) + \sum_n Z_n E_n(t)] = 0,$$

équation linéaire en v .

On vérifie immédiatement que l'on retrouve, dans le cas particulier choisi, l'équation en v précédente (II.3).

c. Effets négligeables du bruit introduit par la lampe. — L'hypothèse d'un bruit faible nous a conduit à représenter les effets des sources par l'équation (II.3). Cette équation est linéaire et nous permet, par suite, de dissocier l'action de la lampe

La caractéristique a été représentée, autour du point de repos M_0 , par le développement :

$$i_p = sV + bV^3 \quad \text{au troisième ordre.}$$

A l'instant t , le point de fonctionnement est M . Son abscisse est $V(M)$, et la pente de la caractéristique est :

$$s(M) = \left(\frac{di_p}{dV} \right)_M = s + 3bV^2(M).$$

La f.é.m. série donnée par la formule (II.8) est donc :

$$e = - \frac{d}{dt} (MS E_L + 3MbV^2 E_L).$$

Nous retrouvons bien l'expression mentionnée plus haut.

Nous pouvons maintenant comparer les effets du bruit émis par la résistance série r du circuit oscillant et de celui produit par la lampe. La résistance équivalente de la lampe sera remplacée par la résistance série ramenée que nous venons de déterminer.

Remarquons que $s(M)$ diffère assez peu de la pente au point de repos $s(M_0)$. On peut, par suite, remplacer l'expression (II.8) par

$$e = - \frac{d}{dt} MS E_L(t),$$

S désignant la valeur moyenne de la pente pour une période d'oscillation.

Le spectre du bruit $E_L(t)$ sera réduit, par suite de la sélectivité du circuit oscillant, à une bande de fréquences voisines de la fréquence propre $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ de ce circuit oscillant. La f.é.m. ramenée en série sera donc remplacée par

$$-jMS\omega_0 E_L(t).$$

La puissance de bruit qui lui correspond a pour valeur :

$$M^2 S^2 \omega_0^2 E_L^2(t)$$

et nous voyons que la réaction a pour effet de multiplier la puissance de bruit, effectivement émise par la lampe, par le facteur :

$$M^2 S^2 \omega_0^2.$$

Nous allons évaluer ce facteur.

A la stabilisation, la pente moyenne sur une période, S , prend une valeur qui annule exactement la résistance apparente moyenne de l'oscillateur. On a

$$MS + rC = 0 \quad \text{ou} \quad |MS| = rC.$$

Le facteur trouvé devient :

$$r^2 C^2 \omega_0^2$$

ou, avec $rC\omega_0 = \frac{1}{Q}$ (Q , coefficient de surtension du circuit oscillant)

$$M^2 S^2 \omega_0^2 = \frac{1}{Q^2}.$$

Cette expression nous permettra de négliger dans la suite le bruit produit par la lampe à côté du bruit d'agitation thermique du circuit oscillant.

Par exemple, pour des quartz dont les coefficients de surtension auront des valeurs comprises entre

$$Q = 5 \cdot 10^4 \quad \text{et} \quad Q = 3 \cdot 10^5.$$

Les facteurs de réduction $\frac{1}{Q^2}$ seront compris entre

$$\frac{1}{Q^2} = 4 \cdot 10^{-10} \quad \text{et} \quad \frac{1}{Q^2} = 10^{-11},$$

tandis que la résistance équivalente R_L n'est que 10^2 à 10^3 fois supérieure à la résistance série du circuit oscillant.

2. La perturbation apportée au signal théorique par le bruit.

Les conditions dans lesquelles nous nous placerons seront celles que nous venons de préciser :

— Le bruit restera faible à côté de l'amplitude du signal émis;

— La source agira « directement » sur le système. Elle sera réduite en l'occurrence à la résistance série du circuit oscillant.

Il ne nous reste plus qu'à calquer les méthodes employées antérieurement à l'étude du circuit amorti classique non entretenu (chap. I, § B).

Les différences apportées par la réaction seront notées au fur et à mesure que nous les rencontrerons.

Nous déterminerons encore la perturbation apportée à l'oscillation théorique par une impulsion élémentaire engendrée dans r . Le raisonnement sera ensuite étendu au cas où les chocs sont très nombreux et répartis au hasard dans le temps.

A. INFLUENCE D'UNE IMPULSION ÉLÉMENTAIRE SUR L'OSCILLATION IDÉALE NON ENTACHÉE DE BRUIT.

— *a. Étude directe de l'excitation par un choc.* — *α. Le choc est produit pendant la phase d'amorçage des oscillations, approximation linéaire.* — Nous avons vu que, lorsque les oscillations s'amorcent,

le régime transitoire entaché de bruit qui prend naissance peut être décrit avec une bonne approximation par l'équation linéaire :

$$(II.9) \quad LC' \frac{d^2 V}{dt^2} + (Ms + rC) \frac{dV}{dt} + V = E(t).$$

Le terme résistant $Ms + rC$ est négatif. L'oscillation, en l'absence d'impulsions perturbatrices [$E(t) \equiv 0$], a donc une amplitude qui croît exponentiellement avec le temps. La constante de temps de l'exponentielle étant

$$\tau = \frac{-2LC'}{Ms + rC},$$

nous représenterons cette oscillation théorique par

$$V(t) = a_0 e^{\frac{t}{\tau}} \sin \omega_0 t,$$

Nous exprimerons l'effet d'un choc isolé en remplaçant la fonction du second membre de l'équation (II.9) par l'impulsion naturelle $G(t - t_j)$, infligée à l'instant t_j . Les modifications d'amplitude Δa et de phase $\Delta \varphi$ qu'elle produit, à cet instant, sont encore obtenues en exprimant la discontinuité de $\frac{dV}{dt}$, V restant inchangé.

On trouve toujours, à une approximation du premier ordre (bruit faible)

$$\begin{aligned} \Delta a &= q \omega_0 \cos \omega_0 t_j, \\ a \Delta \varphi &= -q \omega_0 \sin \omega_0 t_j. \end{aligned}$$

[a , amplitude d'oscillation juste avant le choc; q , échelon de $G(t - t_j)$].

La fréquence n'est pas affectée, puisqu'elle est rigidement liée aux paramètres qui déterminent le circuit.

Ces modifications instantanées d'amplitude et de phase Δa et $\Delta \varphi$, et leur évolution ultérieure, résultent encore de l'addition, à l'oscillation idéale non entachée de bruit, d'une oscillation de perturbation $v(t)$:

L'oscillation théorique et son terme de perturbation $v(t)$ sont respectivement une solution de l'équation (II.9) sans second membre, et la solution forcée avec second membre.

On détermine facilement cette dernière dont l'amplitude croît exponentiellement, suivant la même loi que celle de $V(t)$, à partir de la valeur initiale $q \omega_0$

$$v(t) = q \omega_0 e^{\frac{t - t_j}{\tau}} \sin \omega_0 (t - t_j), \quad \text{avec } \tau = \frac{-2LC'}{Ms + rC}.$$

Les deux oscillations sont représentées sur la

figure 17 que l'on comparera avec la figure 7 du paragraphe I.B.a, remarque 2.

Si nous décomposons le choc élémentaire naturel $G(t - t_j)$ en son « composant watté » et son « composant déwatté », nous devons aussi décomposer l'oscillation forcée élémentaire $v(t)$ précédente en une « oscillation élémentaire wattée » et une « oscillation élémentaire déwattée » représentées sur la figure 18.

Les deux oscillations composantes, ainsi que



Fig. 17.

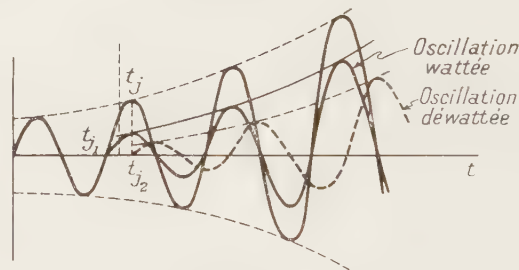


Fig. 18.

l'oscillation résultante $v(t)$ liée au choc naturel sont encore du même type. Ce sont des oscillations à croissance exponentielle, de même constante de temps et de même pseudo-période que l'oscillation du régime non perturbé.

Ce caractère est propre à tous les oscillateurs linéaires, amortis ou auto-entretenus : les oscillations de réponse, wattée et déwattée, sont identiques.

β. La perturbation du régime stabilisé théorique. — Lorsque l'amplitude est stabilisée en l'absence de bruit, l'oscillation est sensiblement sinusoïdale. Comme dans le cas pseudo-sinusoïdal précédent, un choc électronique produit une petite modification de cette amplitude en même temps qu'un petit déphasage.

Une différence importante se présente avec le

cas du paragraphe précédent lorsqu'on suit l'évolution ultérieure des deux petites perturbations d'amplitude et de phase. Nous allons voir, en effet, que les lois qui les régissent ne sont plus identiques.

De plus, un phénomène d'un type nouveau apparaît :

La fréquence n'est plus uniquement liée aux données du circuit, elle dépend généralement de l'amplitude d'oscillation.

Nous sommes en présence d'une loi devenue familière lorsqu'on considère un pendule grave. La fréquence, indépendante de l'amplitude lorsque ce dernier fonctionne dans des conditions à peu près linéaires, devient dépendante de l'amplitude lorsque intervient la non-linéarité de l'équation d'oscillation.

Un choc naturel élémentaire, altérant l'amplitude, altérera donc corrélativement la fréquence.

Les trois modifications fondamentales apportées au régime par ce choc sont en définitive :

1° Un déphasage, que l'on peut représenter par une petite translation de la sinusoïde des temps parallèlement à l'axe des temps Ot ;

2° Une variation d'amplitude, représentée par une petite dilatation de cette sinusoïde perpendiculairement à Ot ;

3° Une variation de fréquence, représentée par une petite dilatation des arcs de sinusoïde parallèlement à Ot .

La perturbation du régime sera donc connue lorsqu'on aura déterminé, d'une part ces trois modifications fondamentales à l'instant t_j du choc, d'autre part leurs lois d'évolution après le choc.

Nous simplifierons considérablement l'étude en partant d'un système non linéaire privilégié, pour lequel la fréquence sera indépendante de l'amplitude. Nous n'aurons alors à considérer que les fluctuations d'amplitude et de phase, réservant pour plus tard l'examen des effets de la dépendance fréquence-amplitude. Ce cas n'est pas purement idéal, nous verrons, en effet, que les fréquences des oscillateurs réels ne sont pas sensibles au même degré aux variations d'amplitude. Nous vérifierons sans peine que l'oscillateur choisi pour type au début répond assez bien à notre condition.

Effet du choc naturel et de ses composants watté et déwatté. — Représentons l'oscillation stabilisée théorique par la sinusoïde

$$V = a \sin \omega_0 t.$$

Il est facile de voir que les variations d'ampli-

tude et de phase, Δa et $\Delta \varphi$, apportées à ce régime idéal par une impulsion naturelle isolée, sont encore données par :

$$\Delta a = q \omega_0 \cos \omega_0 t_j,$$

$$\Delta \varphi = - \frac{q \omega_0}{a} \sin \omega_0 t_j$$

au premier ordre près.

Avant le choc, le gain du circuit est, en moyenne (pour une oscillation complète), égal à 1. La modification de l'amplitude Δa fait varier ce gain qui peut prendre, suivant la façon dont est appliqué le choc (instant t_j et signe de q), une valeur supérieure ou inférieure à 1. Dans les deux cas, le système stabilisateur (ici la courbure de la caractéristique) ramène sa valeur à l'unité.

Il en résulte un retour à la stabilisation, soit par croissance, soit par décroissance exponentielle de l'amplitude.

Le déphasage, lui, se maintient éternellement puisque sa présence revient à changer, dans l'équation d'oscillation, l'origine des temps arbitrairement choisie.

Remplaçons le choc naturel par ses composants watté et déwatté dont les définitions, données antérieurement en prenant pour exemple l'action du choc naturel sur un système linéaire, restent valables ici.

Le choc watté ne produit aucun déphasage, mais simplement une modification instantanée de l'amplitude, de valeur

$$\Delta a = q \omega_0 \cos \omega_0 t_j.$$

Cette perturbation décroîtra ensuite exponentiellement avec le temps, le système tendant à nouveau vers le régime stable.

Le choc déwatté a pour seul effet un déphasage de valeur

$$\Delta \varphi = - \frac{q \omega_0}{a} \sin \omega_0 t_j.$$

Ce déphasage, invariable ensuite au cours du temps, décale rigidement la sinusoïde des temps parallèlement à Ot .

Il est facile de traduire ces résultats sous une forme analogue à celle que nous avons adoptée dans le cas pseudo-sinusoïdal de l'amorçage :

L'oscillation du système, après le choc petit appliqué à l'instant t_j , est obtenue en superposant à la sinusoïde théorique :

— Une sinusoïde amortie, en phase avec elle, représentant l'effet du choc watté (sa constante de temps sera déterminée plus loin);

— Une sinusoïde vraie, en quadrature avec la

sinusoïde théorique, représentant l'effet du choc déwatté.

Elles sont représentées toutes deux sur la figure 19 que l'on comparera aux figures 8 et 18.

Les oscillations wattée et déwattée ne sont plus identiques. La non-linéarité a introduit une dissymétrie dans la réponse du système à un choc naturel.

Si nous suivons l'évolution continue de l'oscillateur, dans son passage de l'amorçage à la stabilisation, nous voyons que l'oscillation wattée, dont l'amplitude allait en croissant dans la phase transitoire, est étouffée dès que le régime stable est atteint.

L'oscillation déwattée, au contraire, se stabilise en amplitude en même temps que le signal théorique.

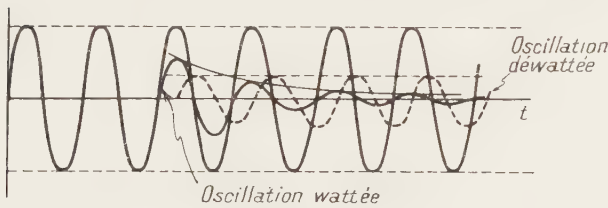


Fig. 19.

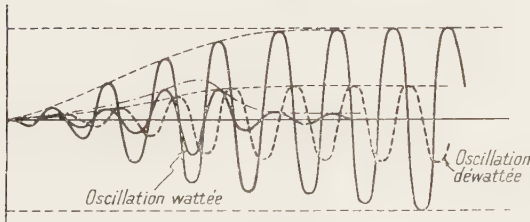


Fig. 20.

b. « Oscillation paire » et « oscillation impaire ».
Emploi de la méthode de Rice. — Nous allons retrouver les conclusions du paragraphe précédent en décomposant cette fois l'impulsion donnée, suivant la méthode de Rice (chap. I, § A.d), en une « impulsion paire » et une « impulsion impaire ». Il pourrait sembler inutile de recommencer l'étude par ce moyen, puisque nous avons constaté déjà l'identité au premier ordre de « l'impulsion paire » et de « l'impulsion wattée », ainsi que de « l'impulsion impaire », et de « l'impulsion déwattée » (chap. I, § B.d).

La décomposition que nous allons maintenant utiliser se réduit donc à la précédente. Cependant, la solution que nous donnerons sera très différente. Elle aura l'avantage d'apporter plus de rigueur à certains points de l'exposé. Elle permettra le calcul de la constante de temps du pendule amorti équivalent et conduira à une généralisation rapide et simple lorsque le choc unique sera remplacé par un oscillogramme de bruit.

Nous n'étudierons plus dans la suite la phase d'établissement du régime qui ne nous a servi qu'à suivre le passage continu d'un état quasi-linéaire à l'état non linéaire stabilisé.

L'équation générale des oscillations avec bruit ayant été mise sous la forme :

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + (Ms + rC + 3MbV^2) \frac{dV}{dt} + V = E(t),$$

nous remplacerons d'abord comme plus haut la fonction du second membre par l'impulsion originelle $G(t - t_j)$ appliquée à l'instant t_j .

Nous décomposerons ensuite $G(t - t_j)$ en sa partie paire $G_1(t - t_j)$ et sa partie impaire $G_2(t - t_j)$ (chap. I, § A.d).

Il est naturel d'employer une décomposition analogue pour caractériser l'effet du choc.

Cet effet a été réduit (chap. II, § 1.b) à l'addition, au régime idéal, d'un terme de perturbation $v(t)$ donné par l'équation :

$$LC \frac{d^2 v}{dt^2} + [Ms + rC + 3MbV_s^2] \frac{dv}{dt} + \left[1 + 6MbV_s \frac{dI_s}{dt} \right] v = G(t - t_j),$$

(V_s , régime théorique exempt de bruit).

On décomposera maintenant $v(t)$ en sa partie paire et sa partie impaire. On posera donc :

$$v(t) = v_1 + v_2 = \xi(t) \cos \omega_0 t + \eta(t) \sin \omega_0 t.$$

Dans ces conditions, l'équation précédente est équivalente (si l'on ne tient pas compte des termes de pulsations $2\omega_0, 3\omega_0, \dots$) à (5)

$$(II.10) \quad \begin{aligned} v_2'' + 4\varepsilon\omega_0[1 + \beta V_s(v_1 + v_2)]v_2' &+ [\omega_0^2 + 2\varepsilon\omega_0\beta V_s'(v_1 + v_2)]v_2 \\ + v_1'' + 4\varepsilon\omega_0[\beta V_s(v_1 + v_2)]v_1' &+ [\omega_0^2 + 2\varepsilon\omega_0\beta V_s'(v_1 + v_2)]v_1 \\ &= \omega_0^2 G_1(t - t_j) + \omega_0^2 G_2(t - t_j) \end{aligned}$$

où l'on a posé pour condenser l'écriture :

$$(II.11) \quad \begin{cases} 2\varepsilon\omega_0 = -\frac{Ms + rC}{LC}, & \beta = -\frac{3Mb}{Ms + rC}, \\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC}. \end{cases}$$

(5) Un calcul plus complet faisant intervenir les termes du second ordre en v donnerait :

$$(II.11) \quad \begin{aligned} v_2'' + 4\varepsilon\omega_0 \left[1 + \beta V_s(v_1 + v_2) + \frac{\beta}{2}(v_1 - v_2)^2 \right] v_2' &+ [\omega_0^2 + 2\varepsilon\omega_0\beta V_s'(v_1 + v_2)]v_2 \\ + v_1'' + 4\varepsilon\omega_0 \left[\beta V_s(v_1 + v_2) + \frac{\beta}{2}(v_1 + v_2)^2 \right] v_1' &+ [\omega_0^2 + 2\varepsilon\omega_0\beta V_s'(v_1 + v_2)]v_1 \\ &= \omega_0^2 G_1(t - t_j) + \omega_0^2 G_2(t - t_j). \end{aligned}$$

Cette équation se sépare en deux équations distinctes :

$$(11.12) \quad \begin{cases} \text{Équation aux amplitudes :} \\ v_2'' + 4\varepsilon\omega_0 v_2' + \omega_0^2 v_2 = \omega_0^2 G_1(t-t_j), \\ \text{Équation aux phases :} \\ v_1'' + \omega_0^2 v_1 = \omega_0^2 G_2(t-t_j). \end{cases}$$

On remarque alors que l'oscillateur garde indéfiniment la mémoire de la partie $G_2(t-t_j)$ du choc, tandis que $G_1(t-t_j)$ a, au contraire, un effet qui disparaît suivant une loi exponentielle de constante de temps

$$\tau = \frac{1}{2\varepsilon\omega_0} = - \frac{LC}{Ms - rC}.$$

Si nous remplaçons, à une approximation du premier ordre (chap. I, § B.d) $G_1(t-t_j)$ et $G_2(t-t_j)$ par $G_1(t-t_{i1})$ et $G_2(t-t_{i2})$ (t_{i1} et t_{i2} , points d'élongation nulle et d'élongation maximum du signal théorique, les plus voisins de t_j), nous retrouvons les résultats mentionnés au paragraphe précédent :

L'oscillateur non linéaire se comporte;

Vis-à-vis de l'impulsion paire $G_1(t-t_{i1})$, comme un pendule amorti de constante de temps $\tau = \frac{1}{2\varepsilon\omega_0}$;

Vis-à-vis de l'impulsion impaire $G_2(t-t_{i2})$, comme un pendule non amorti.

c. *La perturbation du régime et le diagramme de Nyquist mobile.* — Reportons-nous au diagramme de Nyquist mobile de l'oscillateur considéré (fig. 21).

Nous savons que, lorsque le régime est atteint, le diagramme passe par l'origine O, et que le gain de l'oscillateur vaut à ce moment l'unité.

Toute modification d'amplitude à partir de la valeur stabilisée a (produite, par exemple, par un choc) fait subir un déplacement à ce diagramme.

Deux cas peuvent se présenter :

— Ou bien le diagramme perturbé enveloppe l'origine (courbe 1 de la figure) et le gain de l'oscillateur devient inférieur à 1;

— Ou bien le diagramme perturbé laisse l'origine à l'extérieur de sa boucle (courbe 2 de la figure) et le gain de l'oscillateur devient supérieur à 1.

L'oscillateur, déplacé de sa position d'équilibre, revient ensuite au régime. Son amplitude reprend la valeur stabilisée a suivant une loi exponentielle, décroissante ou croissante selon que l'amplitude perturbée est supérieure ou inférieure à a , et le diagramme correspondant reprend sa position initiale.

Le « point de fonctionnement » de l'oscillateur

perturbé [1] ne coïncide évidemment plus avec l'origine O. Nous avons montré que la trajectoire qu'il décrit pendant le retour au régime est un petit segment de droite passant par O, trajectoire orthogonale du diagramme de Nyquist mobile.

Dans le premier cas, la « trajectoire de l'oscillateur » est AO (courbe 1 de la figure 21); dans le second cas, BO.

Cette représentation graphique ne rend aucun compte de la variation de phase du signal produite par le choc naturel et ne traduit donc que l'effet de la composante wattée (perturbation d'amplitude). Elle présente, cependant, un grand intérêt lorsqu'on ne se limite plus à l'exemple trop particulier que nous avons d'abord choisi (fréquence indépendante de l'amplitude). Elle permet, en effet, dans le cas général de suivre, sur la trajectoire AO

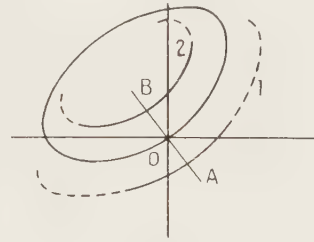


Fig. 21.

ou BO, la variation de fréquence liée à la variation d'amplitude [1].

Lorsque l'impulsion communiquée au circuit (supposé initialement au régime) est unique, comme nous l'avons supposé jusque-là, cette modification de fréquence est assez faible pour qu'il ne soit généralement pas nécessaire d'en tenir compte, au premier ordre.

Lorsque les impulsions sont nombreuses, il peut arriver que leurs actions soient de même sens et que l'effet résultant produise une modification notable de l'amplitude d'oscillation. La fréquence est alors suffisamment affectée pour qu'il soit nécessaire de considérer ses variations, ce que nous ferons plus loin.

B. INFLUENCE D'UN OSCILLOGRAMME DE BRUIT SUR L'OSCILLATION IDÉALE. — Les impulsions produites par la source de bruit sont très nombreuses, et réparties au hasard dans le temps. Nous évaluerons encore leur effet résultant en les remplaçant d'abord par deux suites distinctes :

D'une part, une succession de chocs wattés, d'échelons aléatoires, régulièrement répartis aux points d'élongation nulle, débuts de cycles d'un signal

sinusoïdal théorique représentant l'oscillation auto-entretenu non entachée de bruit :

D'autre part, une succession de chocs dévattés, d'échelons aléatoires, régulièrement répartis aux points d'élongation maximum du même signal.

Les perturbations d'amplitude et de phase, apportées à l'oscillation idéale, seront ainsi nettement séparées.

Si l'on s'intéresse seulement aux variations d'amplitude, on ne tiendra pas compte, à une approximation du premier ordre, des chocs dévattés.

Si les déphasages sont seuls considérés, on négligera de même la suite des chocs wattés.

Nous généraliserons aussi la méthode de Rice, ce qui nous permettra de compléter les résultats obtenus par l'emploi de la première méthode.

Aux fluctuations d'amplitude et de phase s'ajoutent d'ailleurs, comme nous l'avons vu, des fluctuations de fréquence⁽⁶⁾. Ces dernières seront aisément reliées aux modifications d'amplitude connaissant la loi de dépendance fréquence-amplitude de l'oscillateur considéré.

Les méthodes précédentes, très commodées pour déterminer les propriétés statistiques des fluctuations d'amplitude, de phase et de fréquence, doivent cependant être reprises attentivement lorsqu'on veut calculer la puissance de bruit émise en même temps que le signal. Son évaluation met, en effet, en concurrence, avec les infiniment petits du premier ordre, des infiniment petits du second ordre dont les moyennes ne peuvent plus être négligées. L'approximation du premier ordre, valable lorsqu'on s'intéresse seulement aux déphasages, aux variations d'amplitude ou de fréquence, devient alors insuffisante, et il est indispensable de pousser les calculs jusqu'au second ordre.

L'étude complète de l'influence de la source de bruit sur l'oscillation idéale comprend donc nécessairement deux parties :

D'une part, une approximation du premier ordre qui permet de préciser les lois statistiques auxquelles obéissent les fluctuations d'amplitude, de phase et de fréquence du signal :

D'autre part, une approximation du second ordre qui renseigne sur le spectre de puissance et la puissance totale du bruit. [15]

Nous nous limiterons ici à la première partie de

l'étude, réservant pour un exposé ultérieur la détermination du spectre de puissance et de la puissance totale du bruit.

a. Étude directe de l'excitation par chocs. Approximation du premier ordre. — α . Fluctuations de l'amplitude du signal. — Nous avons vu que si un choc électronique, considéré isolément, déränge l'oscillateur de son état de régime supposé atteint ce dernier tend à y revenir suivant une loi approximativement exponentielle. Nous supposons que la constante de temps τ de l'exponentielle est très grande, c'est-à-dire que le système conserve longtemps⁽⁷⁾ la mémoire du choc.

A chaque instant t , un très grand nombre de chocs antérieurs à t apportent ainsi une contribution notable au mouvement du système au voisinage de cet instant.

La perturbation locale produite par un choc

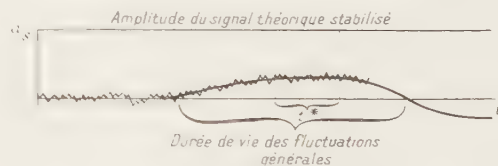


Fig. 1.

est donc très faible à côté de la perturbation due à l'ensemble de tous les chocs antérieurs; par suite, l'amplitude varie très lentement, à de petites fluctuations locales près.

Nous nous intéresserons aux *fluctuations générales*, celles produites par l'ensemble des chocs antérieurs à l'instant considéré, les *fluctuations locales* influant seulement sur la forme du spectre de puissance du bruit.

Ces deux types de fluctuations nous conduisent cependant à préciser d'abord ce que nous entendons par « amplitude d'oscillation » :

Il s'agira de la valeur moyenne de l'amplitude instantanée prise sur un intervalle de temps t^* , faible à côté de la durée de vie moyenne des fluctuations générales (fig. 22). Ce laps de temps sera choisi, au contraire, très grand à côté de la largeur des fines dentelures locales.

En d'autres termes, la courbe qui décrira la variation générale de l'amplitude sera, à chaque instant, le courant direct de l'oscillogramme local.

L'étude des propriétés statistiques de l'ampli-

(6) Nous aurons à tenir compte, dans le paragraphe B, des variations de la fréquence avec l'amplitude, aussi désignerons par ω_s la pulsation du régime stabilisé théorique et par ω_0 la pulsation à l'amorçage.

(7) Des valeurs numériques préciseront ce que nous entendons par « grande constante de temps ». Il s'agit évidemment d'une durée très supérieure à la période du signal théorique.

tude d'oscillation comprendra, d'une part la détermination du carré moyen de ses fluctuations générales (moyenne prise sur une durée aussi grande que possible), d'autre part la détermination de leur durée de vie moyenne.

Détermination du carré moyen des fluctuations générales d'amplitude. — Chaque impulsion naturelle sera remplacée, comme il a été dit, par le choc watté correspondant et nous déterminerons l'amplitude d'oscillation, à chaque instant, en tenant compte de tous les chocs wattés dont l'oscillateur aura gardé la mémoire.

Il suffira donc, pour obtenir l'amplitude résultante, de superposer au signal sinusoïdal théorique, les « oscillations de perturbation » élémentaires produites indépendamment par ces chocs wattés (fig. 19 et 23).

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent A, les oscillations de perturbation élémentaires sont exponentiellement amorties, en phase ou en opposition de phase avec le signal théorique. Elles sont très nombreuses et leurs amplitudes au départ sont évidemment aléatoires comme les chocs qui les engendrent.

On les a considérées comme la réponse aux chocs wattés d'un pendule amorti de pulsation ω_s (celle du signal théorique stabilisé), et de constante de temps τ (celle de retour au régime de l'oscillateur).

Le terme de perturbation d'amplitude résultant, qui s'ajoute au signal théorique, est donc le résultat de l'attaque de ce pendule amorti équivalent par la suite des chocs wattés.

L'amplitude de cette oscillation de bruit (comptée algébriquement) a une valeur moyenne nulle, puisque les échelons des chocs wattés agissants ont, comme ceux des chocs naturels, autant de chances d'être positifs que négatifs.

Le carré moyen de l'amplitude du pendule amorti équivalent est obtenu simplement par l'emploi des méthodes courantes. On trouve (appendice IV)

$$(II.13) \quad \overline{v^2(t)} = \frac{1}{\tau} n q^2 \omega_s^2 \tau,$$

n , nombre moyen de chocs naturels par unité de temps;

q^2 , carré moyen de l'échelon d'un choc naturel;

τ , constante de temps du pendule amorti équivalent;

ω_s , pulsation de l'oscillation idéale au régime.

Les grandeurs n et q^2 que nous utilisons ici ne sont pas directement accessibles expérimentalement. Il est facile cependant de les relier à la valeur r de la résistance génératrice de bruit, et à la tempé-

rature absolue T_k de cette résistance. Une théorie bien connue [2] montre, en effet, que l'on a :

$$nq^2 = 2kT_k r;$$

k , constante de Boltzmann.

Le carré moyen de l'amplitude de bruit devient alors :

$$(II.14) \quad v^2(t) = \frac{kT_k r}{2} \omega_s^2 \tau.$$

Appliquons cette formule à l'oscillateur simple choisi précédemment comme exemple (chap II, § 1. a). Nous avons calculé plus haut sa constante de temps qui vaut :

$$\tau = \frac{LC}{Ms + rC} = \frac{1}{(Ms + rC)\omega_s^2}.$$

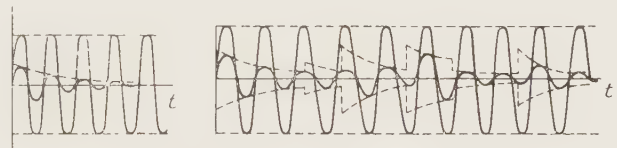


Fig. 23.

On en déduit la valeur de $\overline{v^2(t)}$

$$v^2(t) = \frac{kT_k r}{2(Ms + rC)}.$$

Si l'on fait intervenir dans cette relation la valeur a_s de l'amplitude stabilisée donnée par

$$a_s = 2\sqrt{-\frac{Ms + rC}{3Mb}},$$

on trouve :

$$(II.15) \quad \overline{v^2(t)} = \frac{kT_k r}{2rC} \left[1 + \frac{1}{3} \frac{s}{b} \frac{1}{a_s^2} \right].$$

On vérifie aisément que $\frac{kT_k r}{rC}$ est le carré moyen de l'amplitude du circuit amorti classique non entretenu à résistance, self, capacité (r, L, C) attaqué par les chocs wattés précédents. La formule (II.15) montre que le bruit est d'autant plus intense que l'amplitude stabilisée est plus faible (*).

APPLICATIONS. — 1^{er} exemple. — Appliquons cette formule à un circuit oscillant (L, C, r) série hypothétique dont nous supposons que les caractéristiques sont celles d'un quartz. Un tel circuit, irréalisable avec les selfs, capacités, résistances usuelles, sera une

(*) Ce résultat a été vérifié expérimentalement au Laboratoire de Radioélectricité de l'E. N. S. par M. Buyle-Bodin, agrégé de Physique.

image simplifiée du quartz de même qualité au voisinage de sa fréquence d'antirésonance.

Adoptons pour données [3]

$$\begin{aligned} C &= 0,018 \text{ pF}, \\ r &= 400 \Omega, \\ Q &= 58\,800, \\ \nu_s &= 389 \text{ kc/s}, \\ T_h &= 300; \end{aligned}$$

s et b sont généralement du même ordre de grandeur. Par exemple, en prenant pour lampe d'entretien une 6 AK 5, un développement en série au voisinage du point de repos choisi a donné

$$\frac{s}{b} = 2,5.$$

On trouve alors :

$$v^2(t) = 11,4 \cdot 10^{-8} \left(\frac{3,3}{a_s^2} - 1 \right).$$

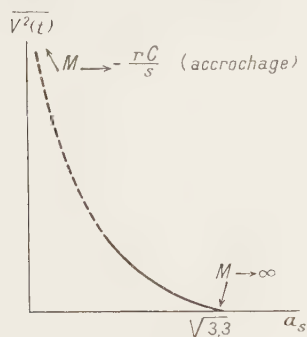


Fig. 23 bis.

Nous indiquons les valeurs de $v^2(t)$, déduites de cette formule, correspondant aux amplitudes stabilisées, 1 et 0,1 V. Pour des amplitudes plus faibles, le bruit deviendrait important à côté du signal, ce qui serait contraire aux hypothèses de départ :

$$\begin{aligned} a_s = 1 \text{ V}, & \quad v^2(t) = 26,2 \cdot 10^{-8} \text{ V}^2, \\ a_s = 0,1 \text{ V}, & \quad v^2(t) = 37,6 \cdot 10^{-8} \text{ V}^2. \end{aligned}$$

2^e exemple [4]. — Avec les données suivantes :

$$\begin{aligned} C &= 0,05 \text{ pF}, \\ r &= 30 \Omega, \\ Q &= 1\,050\,000, \\ T_h &= 300. \end{aligned}$$

On trouve

$$\overline{v^2(t)} = 4 \cdot 10^{-8} \left(\frac{3,3}{a_s^2} - 1 \right).$$

$$\begin{aligned} a_s = 1 \text{ V}, & \quad \overline{v^2(t)} = 9,2 \cdot 10^{-8} \text{ V}^2, \\ a_s = 0,1 \text{ V}, & \quad \overline{v^2(t)} = 13,2 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2. \end{aligned}$$

Vitesse d'évolution des fluctuations générales d'amplitude, intervalle de corrélation λ_0 . — Nous suppo-

serons toujours que l'on a suivi au cours du temps les fluctuations d'amplitude du signal et qu'on les a enregistrées sur un oscillogramme (fig. 24).

Négligeant encore les fines irrégularités locales,

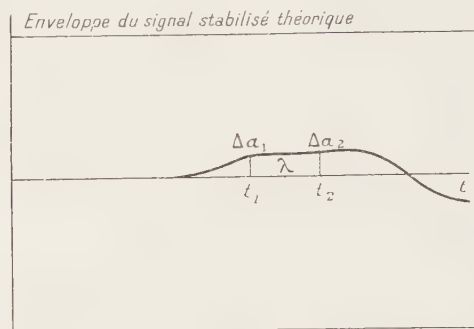


Fig. 24.

nous caractériserons la vitesse d'évolution des fluctuations générales d'amplitude par la largeur moyenne des grandes dentelures de cet oscillogramme (fig. 24). Plus cette largeur est dilatée, plus la vitesse d'évolution est faible.

Cette largeur moyenne sera remplacée, elle-même, pour la commodité des raisonnements, par l'« intervalle de corrélation » de l'oscillogramme :

Soient Δa_1 et Δa_2 les fluctuations d'amplitude, représentées sur le schéma, aux instants t_1 et t_2 (fig. 24); l'intervalle de corrélation λ_0 est l'intervalle limite $t_2 - t_1$ au delà duquel Δa_1 et Δa_2 ne sont plus corrélés.

En d'autres termes, si l'on désigne par $\overline{\psi(\lambda)}$ la fonction de corrélation moyenne de l'oscillogramme, λ_0 est la plus petite valeur de λ au delà de laquelle $\overline{\psi(\lambda)}$ est identiquement nulle.

Cette définition suppose *a priori* l'existence d'une telle valeur λ_0 . Nous voyons intuitivement que l'existence de cette limite λ_0 tient à la durée finie de la mémoire du système.

La limite λ_0 est d'ailleurs liée, comme nous allons



Fig. 25.

le voir, à la constitution ultime de l'oscillogramme de bruit (oscillogramme de la figure 24).

Pour simplifier, nous supposons d'abord cet oscillogramme construit à partir de motifs élémen-

laïres de durée bien définie. En fait, cette hypothèse devra être examinée avec soin :

L'oscillogramme que nous envisageons ici est évidemment l'enveloppe de l'oscillation du pendule amorti équivalent déjà introduit. Les motifs élémentaires qui le constituent sont, par suite, les enveloppes des oscillations élémentaires de réponse du pendule amorti aux chocs wattés individuels. Ce sont des portions d'exponentielles amorties, de valeurs au départ aléatoires (fig. 25). Leurs durées de vie sont théoriquement infinies, mais l'on peut admettre cependant que leurs contributions deviennent très vite nulles, et se ramener ainsi au cas plus simple pris comme point de départ.

Nous avons vu au chapitre I (§ 2.h) que $\overline{\psi(\lambda)}$ se déduit très simplement de la fonction de corrélation moyenne $\overline{\Psi(\lambda)}$ des motifs élémentaires qui constituent l'oscillogramme. On a :

$$(II.16) \quad \overline{\psi(\lambda)} = K \overline{\Psi(\lambda)}$$

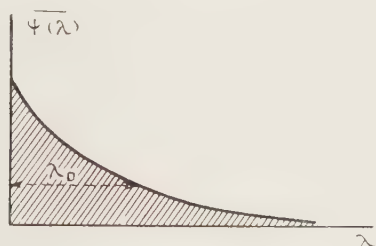


Fig. 26.

K , nombre moyen total des motifs élémentaires qui (constituent l'oscillogramme).

Cette égalité nous montre que $\overline{\psi(\lambda)}$ et $\overline{\Psi(\lambda)}$ ont même intervalle de corrélation. Or, il est facile de voir que l'intervalle de corrélation de $\overline{\Psi(\lambda)}$ se confond avec la durée de vie moyenne des motifs élémentaires (supposée finie); par suite, λ_0 représente la durée de vie moyenne de ces motifs.

L'emploi de la formule (II.16) nous conduit à représenter sur la figure 26 la fonction $\overline{\psi(\lambda)}$ dans le cas où les motifs élémentaires n'ont plus une durée finie, mais sont des portions d'exponentielles amorties analogues à celle de la figure 25.

La courbe obtenue est encore une portion d'exponentielle amortie de même constante de temps que les motifs originels. Nous voyons sur ce dessin qu'il n'existe pas, dans ce cas, en toute rigueur, d'intervalle λ_0 .

On peut cependant en introduire un aisément, pour la commodité des calculs. Le problème est analogue à celui que l'on rencontre lorsqu'on veut définir la largeur d'une courbe en cloche.

Nous choisirons, par exemple, pour intervalle de corrélation moyen l'intervalle $\lambda_0 = \tau$ pour lequel $\overline{\psi(\lambda_0)}$ est égale à la valeur maximum $\overline{\psi(0)}$ divisée par e .

Pour l'oscillateur type, τ est donné par l'expression :

$$\tau = \frac{1}{(Ws + rC)\omega_s^2}$$

Si nous faisons encore intervenir l'amplitude stabilisée a_s , il vient :

$$\lambda_0 = \tau = \frac{1}{rC'\omega_s^2} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{s}{b} \frac{1}{a_s^2} \right)$$

ou

$$(II.17) \quad \lambda_0 = \tau = - \frac{Q}{\omega_s} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{s}{b} \frac{1}{a_s^2} \right),$$

Q , coefficient de surtension du circuit.

APPLICATIONS. — 1^{er} exemple [3]. — Avec

$$\begin{aligned} Q &= 58\,800, \\ \omega_s &= 389 \text{ kc/s}, \\ \frac{s}{b} &= -2,5, \end{aligned}$$

on a

$$\tau = 0,07 \left(\frac{3,3}{a_s^2} - 1 \right).$$

D'où les valeurs suivantes de τ pour des amplitudes stabilisées décroissantes :

a_s (V).	τ (s).
1.....	0,04
0,1.....	6,6
0,01.....	660
0,001.....	6,6.10 ³

Lorsque l'amplitude stabilisée devient très faible, τ prend rapidement de très grandes valeurs.

2^e exemple [4]. — Avec

$$\begin{aligned} Q &\simeq 1\,000\,000, \\ \omega_s &= 100 \text{ kc/s}. \end{aligned}$$

on trouve les valeurs suivantes :

a_s (V).	τ (s).
1.....	3,6
0,1.....	520
0,01.....	0,5.10 ⁴
0,001.....	0,5.10 ⁷

β. Fluctuations de la phase du signal. — Les fluctuations de phase ont, comme les fluctuations d'amplitude, un caractère local et un caractère général. Les propriétés statistiques de ce dernier seront déduites simplement de l'action des chocs déwattés élémentaires.

Comme nous l'avons précisé antérieurement (chap. II, § 2.A.a.β), chaque choc dévatté a pour effet d'ajouter au signal théorique une petite sinusoïde en quadrature, réponse d'un pendule non amorti à ce choc.

L'étude de l'évolution de la phase du signal présentera donc des points communs avec celle de l'évolution de l'amplitude. Elle s'en distinguera néanmoins par le fait que le pendule équivalent a, ici, une mémoire infinie. Par suite, le carré moyen des fluctuations de phase (moyenne prise sur un grand nombre d'expériences), comme le carré moyen de l'amplitude de ce pendule non amorti équivalent, ira en croissant avec le temps.

Le décalage moyen (avance ou retard) observé entre le signal réel et le signal théorique $a \sin \omega_0 t$ sera plus grand, par exemple, au bout d'un an qu'au bout d'un jour.

Les méthodes classiques, couramment employées pour déterminer les carrés moyens de fluctuations, donnent rapidement, comme au paragraphe précédent, le carré moyen de l'amplitude du pendule non amorti équivalent au bout du temps t^* . On trouve (appendice V) :

$$(II.18) \quad \overline{v^2(t)} = \frac{1}{2} n q^2 \omega_s^2 t^*,$$

n , nombre moyen de *chocs naturels* par unité de temps;

q^2 , carré moyen de l'échelon d'un choc naturel;

t^* , temps au bout duquel est calculé le carré moyen de l'amplitude du pendule non amorti équivalent;

ω_s , pulsation de l'oscillation idéale au régime.

On en déduit immédiatement la valeur du carré moyen de la fluctuation de phase au bout du temps t^* .

$$\overline{\Delta\phi^2} = \frac{v^2(t^*)}{a_s^2} = \frac{n q^2 \omega_s^2 t^*}{2 a_s^2},$$

a_s , amplitude de l'oscillation théorique au régime.

On exprimera encore les valeurs de n et de q^2 à partir de la résistance génératrice de bruit r , et de sa température absolue T_k , ce qui donne (avec $nq^2 = 2kT_k r$) :

$$(II.19) \quad \overline{\Delta\phi^2} = \frac{1}{a_s^2} k T_k r \omega_s^2 t^*.$$

Appliquons cette formule à l'oscillateur choisi comme exemple. On sait que la valeur théorique de son amplitude de régime, tout bruit mis à part, est

$$a_s = 2 \sqrt{\frac{Ms + rC}{3Mb}}$$

(la signification des lettres a été donnée au chapitre II, paragraphe 2.A.b). Portant cette valeur dans (II.19) il vient :

$$\Delta\phi^2 = \frac{3}{4} \frac{k T_k r \omega_s^2 t^* M b}{Ms + rC}.$$

b. « Oscillation de perturbation paire » et « oscillation de perturbation impaire ». Emploi de la méthode de Rice. — Il reste peu de choses à ajouter à la méthode développée plus haut (méthode de Rice, chap. II, § 2.A.b) pour la généraliser au cas où le choc isolé est remplacé par un oscillogramme de bruit. Il suffira, en effet, de nous reporter encore à l'équation générale des oscillations avec bruit (chap. II.1.a)

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + (Ms + rC) \frac{dI}{dt} + I = E(t),$$

et de décomposer l'oscillogramme de bruit $E(t)$ en sa partie paire $E_1(t)$ et sa partie impaire $E_2(t)$.

Tous les calculs faits dans le cas d'un choc isolé restent valables et l'on aboutit, de même, aux deux équations distinctes :

$$(II.20) \quad v_2'' + 2\zeta\omega_0 v_2' + \omega_0^2 v_2 = \omega_0^2 E_1(t),$$

$$(II.21) \quad v_1'' + \omega_0^2 v_1 = \omega_0^2 E_2(t),$$

où l'on a posé

$$2\zeta\omega_0 = \frac{Ms + rC}{LC}, \quad \omega_s = \frac{1}{LC}$$

qui traduisent respectivement les fluctuations d'amplitude et les fluctuations de phase du signal.

v_1 et v_2 représentent toujours les termes de perturbation pair et impair

$$v_1 = \xi(t) \cos \omega_0 t, \quad v_2 = \eta(t) \sin \omega_0 t$$

qui s'ajoutent au signal théorique pur. Ces termes se confondent évidemment avec les oscillations des pendules équivalents, le premier amorti, le second non amorti, introduits aux paragraphes précédents.

Il est aisé de retrouver par cette méthode, la valeur du carré moyen de l'amplitude du pendule amorti équivalent (calculé plus haut par la méthode des chocs wattés), ainsi que celle du pendule non amorti.

c. Fluctuation de la fréquence du signal. Loi de dépendance fréquence-amplitude. — Le système garde assez longtemps la mémoire des chocs électroniques individuels pour que l'état d'oscillation dépende à chaque instant d'un très grand nombre de chocs antérieurs.

Nous avons vu qu'ainsi l'amplitude d'oscillation subit de lentes fluctuations générales et de petites

perturbations locales, à la cadence des chocs, d'importance négligeable à côté des premières.

Il est donc possible d'assimiler l'oscillation entachée de bruit, sur un intervalle de temps assez long (intervalle t^* de la figure 22, par exemple, à une portion de sinusoïde dont l'amplitude diffère de la valeur stabilisée a_s d'une faible quantité δa , aux petites irrégularités locales près.

Un état défini par l'amplitude $a_s + \delta a$ (aux fluctuations locales près), sera appelé « *niveau d'oscillation* ».

On sait que, pour les oscillateurs réels, chaque amplitude est caractérisée par une fréquence. Ainsi, tout écart d'amplitude avec l'amplitude de régime entraîne un écart de fréquence avec la fréquence de régime.

Aux fluctuations d'amplitude produites par le bruit correspondront, par suite, des fluctuations de fréquence que nous allons maintenant déterminer.

Notons d'abord que l'effet du bruit apparaît ici comme accessoire en ce sens que la dépendance fréquence-amplitude est une qualité intrinsèque de l'oscillateur.

Les fluctuations de fréquence d'un oscillateur seront avant tout liées à cette qualité, d'où la nécessité de préciser en premier lieu la forme de la loi de dépendance.

Ensuite seront envisagés les écarts dus au bruit.

Dans l'exemple simple choisi, l'équation d'oscillation où le bruit est supposé absent

$$LC \frac{d^2 I}{dt^2} + (Ms + rC + 3MBV^2) \frac{dV}{dt} + I = 0,$$

nous a conduit à la loi de dépendance fréquence-amplitude suivante [1] :

$$\nu = \nu_0 \left[1 - \frac{(Ms + rC)^2}{8LC} \left(1 - \frac{a''}{a_s^2} \right)^2 \right],$$

ν , fréquence correspondant à l'amplitude a ;

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}};$$

a_s , amplitude du régime stabilisé.

Toute légère variation d'amplitude, à partir d'une valeur donnée a , entraîne donc la variation de fréquence

$$\Delta\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{a^2}{a_s^2} \right) \frac{(Ms + rC)^2}{4LC} \frac{\Delta(a^2)}{a_s^2}.$$

On voit que si l'écart d'amplitude est produit à partir de la valeur stabilisée a_s , $1 - \frac{a^2}{a_s^2}$ est nul ainsi que $\Delta\nu$.

L'oscillateur type se confond donc pratiquement

avec l'oscillateur idéal pour lequel la fréquence reste rigoureusement insensible aux variations d'amplitude.

Il n'en est pas toujours ainsi. Il suffit, pour s'en assurer, de considérer l'oscillateur très simple qu'est un pendule grave *non amorti*, pour lequel l'équation d'oscillation bien connue est :

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} + mg l \left(1 - \frac{\theta^2}{6} \right) \theta = 0,$$

θ , angle de rotation;

I , moment d'inertie par rapport à l'axe d'oscillation;

m , masse du pendule;

l , distance du centre de gravité à l'axe d'oscillation;

g , accélération de la pesanteur.

On sait que la loi de dépendance fréquence-amplitude est alors :

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{\theta^2}{16} \right),$$

avec

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mg l}{I}}$$

et l'on voit tout de suite, en comparant cette loi à la précédente, que la fréquence de ce pendule est beaucoup plus sensible aux variations de l'amplitude que celle de l'oscillateur type.

En effet, à toute variation d'amplitude à partir de la valeur a_s correspond la variation de fréquence :

$$\Delta\nu = \frac{\nu_0}{16} \Delta(\theta^2) = \frac{\nu_0}{8} a_s \Delta a.$$

On trouve ici une variation de fréquence finie alors que, dans le cas précédent, l'écart de fréquence correspondant au même écart d'amplitude était nul.

La différence profonde entre les deux cas provient de ce que, pour l'oscillateur type, la non linéarité est introduite dans le terme résistant (coefficient de $\frac{dV}{dt}$), tandis que, pour le pendule grave, la non linéarité est introduite dans le coefficient du dernier terme.

On est ainsi conduit à penser que la fréquence est beaucoup plus sous la dépendance de l'amplitude lorsqu'une légère non linéarité est introduite dans le coefficient du terme en V , que lorsqu'elle est introduite dans le coefficient du terme en $\frac{dI}{dt}$.

Cette propriété devient évidente si l'on ajoute à l'équation de l'oscillateur exempt de bruit un terme non linéaire μV^2 , dans le coefficient de V

Soit, par exemple,

$$(II.22) \quad LC \frac{d^2 V}{dt^2} + (Ms + rC + 3MbV^2) \frac{dV}{dt} + (1 + \mu V^2)V = 0$$

une telle loi d'oscillation. Il sera facile de trouver des exemples réels correspondant à ce cas. On pourra considérer, par exemple, que la réaction n'est pas, en pratique, un terme d'induction pure, mais qu'elle introduit un déphasage parasite. On passera ainsi de l'équation de départ à la nouvelle en remplaçant la mutuelle M par une mutuelle complexe.

On vérifie aisément que la fréquence est alors liée à l'amplitude par la relation :

$$\nu = \nu_0 \left[1 + \frac{3\mu}{8} a^2 - \frac{(Ms + rC)^2}{8LC} \left(1 - \frac{a^2}{a_s^2} \right)^2 \right].$$

La variation $\Delta\nu$, entraînée par une variation $\Delta(a^2)$ de a^2 , est donnée par

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{3\mu}{8} \Delta(a^2) + \left(1 - \frac{a^2}{a_s^2} \right) \frac{(Ms + rC)^2}{4LC} \frac{\Delta(a^2)}{a_s^2}.$$

Si elle est produite à partir de l'état initial stabilisé, on doit remplacer a^2 par a_s^2 dans les coefficients de l'expression ci-dessus.

On trouve alors, puisque $1 - \frac{a_s^2}{a_s^2} = 0$:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{3\mu}{8} \Delta(a^2).$$

En conclusion, la loi de dépendance est réduite à la forme simple :

$$(II.23) \quad \nu = \nu_0 \left(1 + \frac{3\mu}{8} a^2 \right).$$

Dans le cas du pendule grave, μ a la très forte valeur $-\frac{1}{6}$, ce qui rend la fréquence très sensible aux variations d'amplitude.

Loi de dépendance fréquence amplitude de l'oscillateur « circuit grille accordé-circuit plaque accordé ». — Nous allons évaluer μ en prenant pour exemple un oscillateur radioélectrique.

Abandonnant l'oscillateur type trop simplifié qui nous a servi jusque-là, nous le remplacerons par l'oscillateur à couplage capacitif grille-plaque de la figure 27. Ce montage est analogue à celui de l'oscillateur de Pierce. Il est, cependant, plus simple, aussi l'abordons-nous avant de passer au schéma de l'oscillateur à quartz.

Les notations que nous utiliserons sont indiquées sur la figure 27.

Il suffit, pour obtenir l'équation d'oscillation avec bruit, de se reporter à l'équation générale (II.2).

Les divers termes en sont aisément calculés :

On voit, en particulier, que le potentiel ramené par réaction sur la grille est :

$$\frac{Z_2}{Z_3} (1 + sZ_1) \frac{1}{s} I.$$

s , pente de la lampe au point de fonctionnement, variable avec l'élongation ($s = s_0 + bV^2$);

Z_1 , impédance, entre plaque et cathode, du circuit oscillant de plaque qui sert à obtenir l'accrochage par modification de la capacité variable C ;

Z_2 , impédance, entre grille et cathode, du circuit oscillant de grille, à grand coefficient de surtension, qui impose à peu près sa fréquence;

Z_3 , impédance, entre grille et plaque, par l'intermédiaire de laquelle est régénérée l'énergie perdue.

Désignant par Z le coefficient de transfert du bruit, l'équation complète d'oscillation avec bruit devient :

$$(II.24) \quad \left\{ 1 + \frac{Z_2}{Z_3} (1 + sZ_1) \right\} V = ZE$$

Sous cette forme, elle restera valable pour l'oscillateur à quartz. Les valeurs de Z , Z_1 , Z_2 , Z_3 , seront seulement plus compliquées que dans le cas envisagé en premier lieu (circuit oscillant série branché entre grille et cathode).

On a ici

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R + pL} + pC,$$

$$\frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R_1 + pL_1} + pC_1 = \frac{p^2 L_1 C_1 + p R_1 C_1 + 1}{R_1 + p L_1},$$

$$\frac{1}{Z_3} = pC_3,$$

$$Z = \frac{1}{p^2 L_1 C_1 + p R_1 C_1 + 1}.$$

Portant ces expressions dans l'équation (II.24), il vient :

$$\begin{aligned} \left\{ 1 + pC_3 \frac{R_1 + pL_1}{p^2 L_1 C_1 + p R_1 C_1 + 1} (1 + sZ_1) \right\} V \\ = \frac{E}{p^2 L_1 C_1 + p R_1 C_1 + 1} \end{aligned}$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$(II.25) \quad \{ (p^2 L_1 C_1 + p R_1 C_1 + 1) + pC_3 (R_1 + pL_1) (1 + sZ_1) \} V = E.$$

L'interprétation de cette équation est facile :

Pour $C_3 = 0$ (couplage nul), elle se réduit à l'équation linéaire suivante, représentant l'oscillation amortie, entachée de bruit, du circuit de grille :

$$\{ p^2 L_1 C_1 + p R_1 C_1 + 1 \} V = E.$$

On voit que la source de bruit agit directement.

Le terme $p C_3 (R_1 + p L_1) (1 + s Z_1)$ assure l'entretien, en ajoutant à $R_1 C_1$ une résistance négative que nous allons déterminer. Ce terme influe aussi sur la fréquence en ajoutant à $L_1 C_1$ un coefficient, variable avec l'amplitude d'oscillation.

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$Z_1 = r + p l,$$

l'équation (II.25) devient, après développement et regroupement des termes,

$$(II.26) \quad \{ p^3 C_3 L_1 l s + p^2 [L_1 C_1 + L_1 C_3 (1 + s r) + R_1 C_3 l s] + p [R_1 C_1 + R_1 C_3 (1 + s r)] + 1 \} V = E.$$

Nous plaçant dans les conditions où le circuit oscillant de grille impose à peu près sa fréquence propre ν_0 , le premier membre de cette équation se ramène à un polynôme du second degré en p , de la forme :

$$\{ p^2 [L_1 C_1 + L_1 C_3 + (L_1 C_3 r + R_1 C_3 l) s] + p [R_1 C_1 + R_1 C_3 (1 + s r) - L_1 C_3 l s \omega_0^2] + 1 \} V.$$

Nous voyons que la résistance négative introduite a pour valeur :

$$- L_1 \frac{C_3}{C_1} l \omega_0^2 s$$

et que, par suite, le couplage équivaut à une mutuelle induction fictive, de valeur

$$M = - L_1 C_3 \omega_0^2 l$$

ou, avec $\omega_0^2 \simeq \frac{1}{L_1 C_1}$,

$$M = - \frac{C_3}{C_1} l.$$

On déterminerait aisément, à partir de cette mutuelle fictive :

L'amplitude stabilisée théorique lorsque le bruit est supposé absent;

La constante de temps de réaction à un choc, et la puissance de bruit qui s'ajoute au signal théorique, dans le cas réel où l'on tient compte de la source d'agitation thermique;

La loi de dépendance fréquence-amplitude sera obtenue, comme plus haut, à partir de l'équation simplifiée du régime théorique exempt de bruit :

$$(II.27) \quad \{ p^2 [L_1 C_1 + L_1 C_3 + C_3 (L_1 r + R_1 l) s] + 1 \} V = 0.$$

Il est facile de voir que $R_1 l$ est négligeable devant $L_1 r$ lorsque le circuit oscillant de plaque est accordé sur une fréquence voisine de la fréquence propre du circuit oscillant de grille, ce qui est toujours le cas.

Si nous supposons, de plus, que le couplage est lâche, et que l'on a $C_3 \ll C_1$, l'équation (II.27) devient

$$\{ p^2 [L_1 C_1 + C_3 L_1 r s] + 1 \} V = 0.$$

La loi de dépendance fréquence-amplitude s'en déduit. Tenant compte de la loi de variation de s

$$s = s_0 + b V^2,$$

on obtient

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{1}{8} \frac{C_3}{C_1} b r a^2 \right),$$

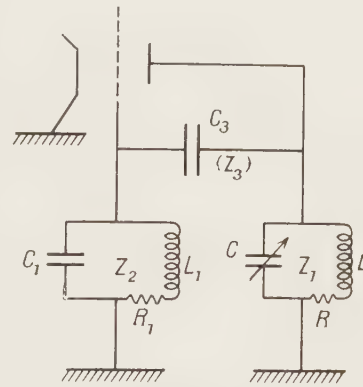


Fig. 17.

d'où

$$\mu = - \frac{C_3}{C_1} b r.$$

Cette expression nous permet d'évaluer la variation de fréquence entraînée par la variation d'amplitude Δa , à partir de la valeur stabilisée théorique a_s . On a

$$\Delta \nu = - \nu_0 \frac{1}{8} \frac{C_3}{C_1} b r a_s \Delta a.$$

Une valeur moyenne des fluctuations de fréquence, résultant des fluctuations d'amplitude dues au bruit, sera obtenue en donnant à Δa la valeur $\sqrt{\overline{v^2(t)}}$ déterminée précédemment.

[Nous rappelons que $\sqrt{\overline{v^2(t)}}$ représente la racine du carré moyen du potentiel de bruit qui s'ajoute au signal théorique sur la grille. On a mis plus haut $\sqrt{\overline{v^2(t)}}$ sous la forme :

$$\sqrt{\overline{v^2(t)}} = \sqrt{- \frac{k T_K R_1}{2 R_1 C_1} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{s}{b} \frac{1}{a_s^2} \right)}.$$

On en déduit la valeur de $a_s \Delta a$:

$$a_s \Delta a = \sqrt{-\frac{k T_K R_1}{2 R_1 C_1} \left(a_s^2 + \frac{1}{3} \frac{s}{b} \right)}$$

ou, en portant dans l'expression donnée plus haut,

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} = -\frac{3}{4} \frac{C_3}{C_1} b r \sqrt{\frac{k T_K R_1}{2 R_1 C_1} \left[\left(-\frac{4}{3} \frac{s}{b} \right) - a_s^2 \right]}$$

Loi fréquence-amplitude de l'oscillateur de Pierce.
— Nous passerons au cas plus compliqué de l'oscillateur à quartz de Pierce, représenté sur la figure 28, en remplaçant, dans l'équation (II.24), Z_1 , Z_2 , Z_3 par les nouvelles valeurs [5] données par :

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R + pL} + pC,$$

$$\frac{1}{Z_2} = \frac{1}{Z_c} + \frac{1}{R_g} + pC_g,$$

avec :

$$\frac{1}{Z_c} = \frac{p^2 L_1 C_1 + p R_1 C_1 + \alpha}{p L_1 \gamma + R_1 \gamma + \frac{\gamma}{p} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0 + C_4} \right)},$$

où l'on a posé :

$$\alpha = 1 + \frac{C_1}{C_0 + C_4} + \frac{C_1}{C_0} \frac{C_4}{C_0 + C_4},$$

$$\gamma = C_1 \frac{C_0 + C_4}{C_0 C_4};$$

$$\frac{1}{Z_3} = pC_3.$$

(Les notations sont indiquées sur la figure 28.)

Un calcul simple donne pour coefficient de transfert du bruit :

$$Z = \frac{C_1}{(C_0 + C_g) + \frac{1}{p R_g}} \sim \frac{1}{p^2 L_1 C_1 + p R_1 C_1 + 1}.$$

L'équation complète d'oscillation avec bruit (II.24) devient donc :

$$(II.28) \left\{ 1 + \frac{\left\{ p C_3 (1 + s Z_1) \times \left[p L_1 \gamma + R_1 \gamma + \frac{\gamma}{p} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0 + C_4} \right) \right] \right\}}{\left\{ p^2 L_1 C_1 + p R_1 C_1 + \alpha + \left(\frac{1}{R_g} + p C_g \right) \frac{\gamma}{p C_1} \right\}} \right\} E = \frac{C_1}{(C_0 + C_g) + \frac{1}{p R_g}} \times \frac{E}{p^2 L_1 C_1 + p R_1 C_1 + 1}.$$

Il est plus difficile de mettre en évidence ici une résistance négative. On y parvient en multipliant les deux membres de l'équation (II.28) par

$$p^2 L_1 C_1 + p R_1 C_1 + \alpha.$$

Il vient :

$$\left\{ \frac{p^2 L_1 C_1 + p R_1 C_1 + \alpha}{p C_3 (1 + s Z_1) \left[p L_1 \gamma + R_1 \gamma + \frac{\gamma}{p} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0 + C_4} \right) \right]} + \frac{1 + \left(\frac{1}{R_g} + p C_g \right) \frac{\gamma}{p C_1} \left[\frac{p L_1 \gamma + R_1 \gamma + \frac{\gamma}{p} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0 + C_4} \right) \right]}{p^2 L_1 C_1 + p R_1 C_1 + \alpha} \right\} E = \frac{C_1}{(C_0 + C_g) + \frac{1}{p R_g}} \frac{p^2 L_1 C_1 + p R_1 C_1 + \alpha}{p^2 L_1 C_1 + p R_1 C_1 + 1} E.$$

Tenant compte de ce que α est très voisin de 1, et de ce que $\frac{1}{C_0 + C_4}$ est négligeable à côté de $\frac{1}{C_1}$

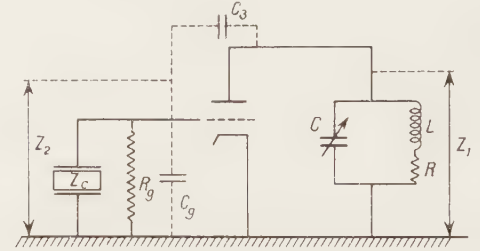


Fig. 28.

on simplifie l'équation précédente qui devient :

$$\left\{ \frac{p^2 L_1 C_1 + p R_1 C_1 + \alpha}{p C_3 (1 + s Z_1) \left[p L_1 \gamma + R_1 \gamma + \frac{\gamma}{p C_1} \right]} + \frac{1 + \left(\frac{1}{R_g} + p C_g \right) \frac{\gamma}{p C_1}}{p^2 L_1 C_1 + p R_1 C_1 + \alpha} \right\} E = \frac{C_1}{(C_0 + C_g) + \frac{1}{p R_g}} E.$$

Chassons le dénominateur $1 + \left(\frac{1}{R_g} + p C_g \right) \frac{\gamma}{p C_1}$.

On obtient, après avoir ordonné les termes en p , et remplacé Z_1 par $r + pl$

$$\left\{ p^3 C_3 L_1 l \gamma + p^2 \times [L_1 C_1 + L_1 (C_3 + C_g) \gamma + L_1 C_3 r s \gamma + C_3 R_1 l s \gamma] + p [R_1 C_1 + R_1 (C_3 + C_g) \gamma + R_1 C_3 r s \gamma] + \frac{L_1}{R_g} \gamma + s \frac{C_3}{C_1} l \gamma \right\} E + \left(\alpha + \frac{R_1}{R_g} \gamma + \frac{C_g + C_3}{C_1} \gamma + s \frac{C_3}{C_1} r \gamma \right) + \frac{1}{p} \frac{\gamma}{R_g C_1} \left\{ E = \frac{C_1}{(C_0 + C_g) + \frac{1}{p R_g}} \left[1 + \left(\frac{1}{R_g} + p C_g \right) \frac{\gamma}{p C_1} \right] E \right.$$

Le quartz impose à l'oscillateur une fréquence

voisine de sa fréquence propre, et cela nous permet encore de ramener l'équation ci-dessus à une équation du second degré en p . Il vient :

$$(II.29) \left\{ p^2 [L_1 C_1 + L_1 (C_3 + C_g) \gamma + L_1 C_3 r s \gamma + L C_3 R_1 s \gamma] \right. \\ \left. + p \left[R_1 C_1 + R_1 (C_3 + C_g) \gamma + R_1 C_3 r s \gamma \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{R_g C_1 \omega^2} (L_1 C_1 \omega^2 - 1) \gamma \right. \right. \\ \left. \left. - (L_1 C_1 \omega^2 - 1) s \frac{C_3}{C_1} l \gamma \right] \right\} V \\ + z + \frac{R_1}{R_g} \gamma + \frac{C_3 + C_g}{C_1} \gamma + s \frac{C_3}{C_1} r \gamma \left\{ V \right. \\ \left. = \frac{C_1}{(C_0 + C_g) + \frac{1}{p R_g}} \left[1 + \left(\frac{1}{R_g} + p C_g \right) \frac{\gamma}{p C_1} \right] E. \right.$$

Examinons d'abord le second membre de cette équation, on a

$$1 + \left(\frac{1}{R_g} + p C_g \right) \frac{\gamma}{p C_1} = 1 + C_g \frac{C_0 + C_4}{C_0 C_4} + \frac{1}{p R_g} \frac{C_0 + C_4}{C_0 C_4} \\ = \frac{C_0 + C_4}{C_0 C_4} \left(\frac{C_0 C_4}{C_0 + C_4} + C_g + \frac{1}{p R_g} \right).$$

C_4 est grand à côté de C_0 et, par suite, $\frac{C_0 C_4}{C_0 + C_4}$ est assez voisin de C_0 pour que l'on puisse remplacer l'expression finale entre parenthèses par

$$C_0 + C_g + \frac{1}{p R_g}.$$

Le second membre de l'équation d'oscillation avec bruit devient donc

$$C_1 \frac{C_0 + C_4}{C_0 C_4} E \sim \frac{C_1}{C_0} E.$$

Nous voyons que la source de bruit n'agit pas directement, la f. é. m. de bruit étant multipliée par le facteur de réduction $\frac{C_1}{C_0}$.

Ce résultat était à prévoir, car le circuit équivalent au quartz (*fig. 29*) est, de toute évidence, un diviseur capacitif de potentiel en alternatif.

Le facteur de réduction $\frac{C_1}{C_0}$ agit, d'ailleurs, aussi sur l'amplitude du signal pour un couplage donné, mais, tandis que le bruit est imposé par la résistance génératrice, l'amplitude du signal peut être réglée à volonté en faisant varier le couplage.

Une légère réduction supplémentaire du bruit est apportée par la réaction comme on le voit en examinant le terme constant de l'équation d'oscillation (II.29) qui est différent de 1.

On retrouvera une équation avec terme constant unité (type auquel nous nous sommes toujours

ramené antérieurement) en divisant les deux membres (donc la f. é. m. de bruit) par

$$z = \frac{R_1}{R_g} \gamma + \frac{C_3 + C_g}{C_1} \gamma + s \frac{C_3}{C_1} r \gamma.$$

Déterminons maintenant le coefficient de dépendance fréquence-amplitude de l'oscillation exempte de bruit.

On vérifie facilement à partir de (II.29) que l'équation de l'oscillation pure théorique, au voisinage de la stabilisation, est

$$(II.30) \left\{ p^2 L_1 C_1 \left(C_g + C_3 + \frac{C_0 C_4}{C_0 + C_4} + C_3 r s \right) \right. \\ \left. \cdot \left(C_g + C_3 + \frac{C_0 C_4}{C_0 + C_4} + C_3 r s \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{C_4}{C_0 C_4} \right)^2 C_1 \right\} V = 0,$$

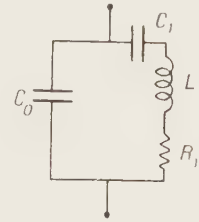


Fig. 29.

il suffit, pour l'obtenir, d'expliciter γ , et de tenir compte de ce que l'on a, à la fréquence d'oscillation [5] :

$$R_1 = \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right).$$

La loi de dépendance fréquence-amplitude s'en déduit. On posera toujours

$$s = s_0 + b V^2,$$

ce qui permet de mettre l'équation aux pulsations sous la forme :

$$(1 - L_1 C_1 \omega^2) \\ \times \left(C_g + C_3 + \frac{C_0 C_4}{C_0 + C_4} + C_3 r s_0 + \frac{3}{4} C_3 r b a^2 \right) \\ + \left(\frac{C_4}{C_0 + C_4} \right)^2 C_1 = 0;$$

on en tire :

$$(II.31) \quad \omega^2 = \frac{1}{L_1 C_1} \\ \times \left[1 - \frac{\left(\frac{C_4}{C_0 + C_4} \right)^2 C_1}{\left(C_g + C_3 + \frac{C_0 C_4}{C_0 + C_4} + C_3 r s_0 + \frac{3}{4} C_3 r b a^2 \right)} \right].$$

On voit que la loi a, ici, une forme assez complexe. En particulier, elle ne se réduit pas à

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{3}{8} \mu a^2 \right).$$

On peut, cependant, la ramener à ce type lorsque a est petit (par exemple $a < 1$ V pour les exemples que nous allons examiner) et l'écrire sous la forme :

$$(II.32) \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \left[1 - \frac{3}{8} \frac{C_1 C_3 r b}{\left(C_g + C_3 + \frac{C_0 C_4}{C_0 + C_4} + C_3 r s_0 \right)^2} \left(\frac{C_4}{C_0 + C_4} \right)^2 a^2 \right].$$

APPLICATIONS. — *Premier exemple.* — Prenons comme premier exemple un oscillateur de Pierce décrit et étudié par P. Vigoureux et C. F. Booth [3], pour lequel les données sont les suivantes :

$$\begin{aligned} C_1 &= 0,018 \text{ pF}, & C_g &= 6,4 \text{ pF}, \\ C_0 &= 9,6 \text{ pF}, & C_4 &= \frac{1}{530}, \\ C_3 &= 136 \text{ pF}, & C_0 &= 530, \\ C_3 &= 2,4 \text{ pF}, & R_1 &= 400 \Omega. \end{aligned}$$

La pente de la lampe d'entretien a pour valeur, au voisinage du point de repos

$$s_0 = 3,6 \cdot 10^{-4} \text{ A/V}.$$

Le circuit de plaque est un circuit oscillant classique, dont la résistance série est de l'ordre de quelques ohms et le coefficient de surtension voisin de 150.

La partie réelle r de son impédance, entre les bornes plaque et cathode, est égale (puisqu'on fonctionne au voisinage de la résonance) à la valeur de la résistance série multipliée par le carré du coefficient de surtension. r est ainsi de l'ordre de $10^4 \Omega$ (nous prendrons pour fixer les idées $r = 4 \cdot 10^4 \Omega$).

Amplitude moyenne du terme de bruit. — Avec ces valeurs, l'équation d'oscillation avec bruit devient, au voisinage de la stabilisation théorique,

$$5,5 \left(L_1 C_1 \frac{d^2 I}{dt^2} - 1 \right) = \frac{1}{530} E$$

(le facteur 5,5 est la valeur calculée de

$$\alpha = \frac{R_1}{R_g} \gamma + \frac{C_3 + C_g}{C_1} \gamma + s \frac{C_3}{C_1} r \gamma$$

en supposant que l'on a $R_g \gg R_1$).

On trouve alors, quand a_s varie, les valeurs

suyantes correspondantes de $\sqrt{v^2(t)}$ (racine du carré moyen du potentiel de bruit sur la grille)

$$(II.33) \quad \begin{array}{cc} a_s \text{ (V)} & \sqrt{v^2(t)} \\ \left\{ \begin{array}{ll} 1, \dots & 1,7 \cdot 10^{-7} \\ 0,1, \dots & 2 \cdot 10^{-6} \\ 0,01, \dots & 2 \cdot 10^{-5} \\ 0,001, \dots & 2 \cdot 10^{-4} \end{array} \right. \end{array}$$

Coefficient de dépendance fréquence-amplitude. — La formule (II.23) exprimant la loi de dépendance fréquence-amplitude devient :

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{3}{8} 2,2 \cdot 10^{-4} \frac{b}{s_0} a^2 \right).$$

Le coefficient de dépendance μ vaut donc dans ce cas :

$$\mu = -2,2 \cdot 10^{-4} \frac{b}{s_0}.$$

Écart de fréquence produit par le bruit. — Une valeur moyenne de l'écart de fréquence produit par le bruit sera évaluée en prenant pour écart d'amplitude moyen la racine du carré moyen de la fluctuation d'amplitude :

$$\Delta a = \sqrt{(a - a_s)^2} = \sqrt{v^2(t)}.$$

L'écart de fréquence qui lui correspond, tiré de la relation (II.23) est

$$\Delta \nu = - \frac{1}{\nu_0} \mu a_s \Delta a.$$

Le tableau (II.33), donnant les valeurs de

$$\Delta a = \sqrt{v^2(t)}$$

pour diverses valeurs de l'amplitude stabilisée a_s , permet de déterminer les valeurs correspondantes de $\Delta \nu$ et de $\frac{\Delta \nu}{\nu_0}$.

Les résultats sont rassemblés ci-dessous :

$a_s \text{ (V)}$	Δa	$a_s \Delta a$	$\frac{\Delta \nu}{\nu_0}$
1, ...	$1,7 \cdot 10^{-7}$	$1,7 \cdot 10^{-7}$	$2,8 \cdot 10^{-11} \left \frac{b}{s_0} \right $
0,1, ...	$2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$3,3 \cdot 10^{-11} \left \frac{b}{s_0} \right $
0,01, ...	$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-7}$	—
0,001, ...	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-7}$	—

On vérifie que lorsque a_s est assez faible ($a_s \leq 0,1$ V), $\frac{\Delta \nu}{\nu_0}$ est indépendant de l'amplitude stabilisée. b et s_0 étant toujours du même ordre, si l'on adopte,

par exemple, la valeur utilisée plus haut $\left| \frac{b}{s_0} \right| = \frac{1}{2,5}$, on trouve :

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} = 1,3 \cdot 10^{-11},$$

Deuxième exemple [4]. — Avec les données :

$$\begin{aligned} C_1 &= 0,05 \text{ pF}, & C_0 &= 8 \text{ pF}, & C_3 &= C_0, \\ C_3 &= 2,4 \text{ pF}, & C_g &= 6,4 \text{ pF}, & \frac{C_1}{C_0} &= \frac{1}{160}, \\ \nu_s &= 100 \text{ kc/s}, & R_1 &= 30 \Omega, & T_k &= 300, \\ s_0 &= 3,6 \cdot 10^{-4}, & r &= 1,10^{-4} \Omega, \end{aligned}$$

on trouve :

$$x = 6,5 \cdot 10^{-4} \frac{b}{s_0}.$$

L'équation d'oscillation avec bruit, au voisinage de la stabilisation théorique est

$$6,4 \left(L_1 C_1 \frac{d^2 V}{dt^2} + 1 \right) = \frac{1}{260} E.$$

On trouve quand a varie les valeurs suivantes de $\sqrt{v^2(t)}$ et de $\frac{\Delta \nu}{\nu_0}$.

a_s (V).	Δa_s	$a_s \Delta a_s$	$\frac{\Delta \nu}{\nu_0}$
1,1,1,1,1,1	$2,97 \cdot 10^{-7}$	$2,97 \cdot 10^{-7}$	$11,5 \left \frac{b}{s_0} \right \cdot 10^{-11}$
0,1,1,1,1,1	$3,6 \cdot 10^{-6}$	$3,6 \cdot 10^{-7}$	$17,5 \left \frac{b}{s_0} \right \cdot 10^{-11}$
0,01,1,1,1,1	$3,6 \cdot 10^{-5}$	—	—
0,001,1,1,1,1	$3,6 \cdot 10^{-4}$	—	—

avec

$$\left| \frac{b}{s_0} \right| = \frac{1}{2,5} \quad \text{et} \quad a_s \leq 0,1 \text{ V},$$

on trouve

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} = 7 \cdot 10^{-11}.$$

d. Extension des résultats précédents à des caractéristiques renfermant des termes pairs. — Si les termes pairs de la caractéristique de la lampe d'entretien n'influent pratiquement pas sur l'effet direct du bruit, ils peuvent, cependant, modifier profondément la loi fréquence-amplitude.

Bien entendu, lorsque l'oscillateur ne possède pas de filtre d'enveloppe, les termes pairs de la caractéristique conduisent à des coefficients impairs de l'équation d'oscillation qui s'annulent en moyenne, sur chaque période. Si, au contraire, il existe un filtre d'enveloppe, la pente de la lampe peut être de la forme

$$s = s_0 + n_1 a + n_2 a^2.$$

On est alors conduit à remplacer la loi

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{3}{8} \mu a^2 \right)$$

par un développement limité en a plus général, tel que

$$\nu = \nu_0 (1 + m_1 a + m_2 a^2).$$

Dans le cas d'un oscillateur de Pierce, par exemple, la loi de dépendance (II.31) devrait être écrite plus complètement :

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \times \left[1 + \frac{1}{2} \frac{C_1}{C_g + C_3 + \frac{C_0 C_k}{C_0 + C_1} + C_3 r s} \left(\frac{C_4}{C_0 + C_4} \right)^2 \right],$$

avec

$$s = f(a)$$

ou, si l'on pose

$$s = s_0 + n_1 a + n_2 a^2,$$

$$\begin{aligned} \omega &\approx \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \\ &\times \left[1 + \frac{1}{2} \frac{C_1 C_3 r n_1}{\left(C_g + C_3 + \frac{C_0 C_k}{C_0 + C_1} + C_3 r s_0 \right)^2} \times \left(\frac{C_k}{C_0 + C_k} \right)^2 a \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{C_1 C_3 r n_2}{\left(C_g + C_3 + \frac{C_0 C_k}{C_0 + C_1} + C_3 r s_0 \right)^2} \times \left(\frac{C_k}{C_0 + C_k} \right)^2 a^2 \right]. \end{aligned}$$

Il est bien difficile de préciser les valeurs de n_1 et n_2 . Ces coefficients dépendent du type de lampe choisi et sont aussi sujets à variation pour les lampes d'un même type. Si nous envisageons, cependant, le cas extrême où n_1 et n_2 sont du même ordre et où m_1 et m_2 ont des valeurs voisines de la valeur μ calculée ci-dessus pour notre second exemple (quelques 10^{-4}), on trouve les valeurs suivantes de $\frac{\Delta \nu}{\nu_0}$ pour divers régimes stabilisés :

a_s (V).	Δa_s	$\frac{\Delta \nu}{\nu_0}$
1,1,1,1,1,1	$2,97 \cdot 10^{-7}$	$5,94 \cdot 10^{-11}$
0,1,1,1,1,1	$3,6 \cdot 10^{-6}$	$3,6 \cdot 10^{-10}$
0,01,1,1,1,1	$3,6 \cdot 10^{-5}$	$3,6 \cdot 10^{-9}$
0,001,1,1,1,1	$3,6 \cdot 10^{-4}$	$3,6 \cdot 10^{-8}$

avec

$$m_1 \approx m_2 \approx 10^{-4},$$

$$\nu = \nu_0 + 10^{-4} a + 10^{-4} a^2.$$

Nous voyons que, lorsque a_s décroît, $\frac{\Delta\nu}{\nu_0}$ croît rapidement. Cela provient de ce que l'on a :

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = m_1 \Delta a + 2 m_2 a_s \Delta a.$$

On ne profite plus, aux faibles amplitudes, de la décroissance du coefficient $2m_2 a_s$ et le terme $m_1 \Delta a$ devient alors prépondérant.

Les valeurs numériques précédentes montrent que l'on a intérêt à éliminer les termes pairs des caractéristiques des systèmes stabilisateurs. On voit, que l'effet de ces termes devient rapidement « catastrophique » aux faibles amplitudes d'oscillation.

e. Comparaison avec l'erreur due aux fluctuations de phase. — Nous avons vu plus haut qu'aux fluctuations de fréquence dues à la dépendance fréquence-amplitude s'ajoutent des fluctuations de phase. On peut maintenant comparer numériquement les deux effets. Tandis que les variations de fréquence liées aux fluctuations d'amplitude se maintiennent pendant une durée très supérieure à la période moyenne, ces dernières perturbent beaucoup plus irrégulièrement la sinusoïde théorique, entraînant des modifications du pas variables d'un cycle à l'autre.

La formule (II.19), compte tenu du facteur de réduction $\frac{C_1}{C_0}$ introduit par le quartz et de l'atténuation légère du bruit due à la réaction, nous permet d'évaluer l'erreur sur la durée du cycle théorique entraînée par de tels déphasages. On trouve rapidement pour le deuxième exemple étudié ci-dessus :

a_s (V)	$\frac{\Delta T}{T_0}$
1.....	10^{-10}
0,1.....	10^{-9}
0,01.....	10^{-8}
0,001.....	10^{-7}

Nous voyons que les fluctuations relatives de la fréquence *instantanée* produites par les effets déphaseurs sont très supérieures à celles produites par la dépendance fréquence-amplitude. Il semble donc, au premier abord, que ce phénomène limite la précision de la mesure et que les écarts de fréquence produits par l'instabilité de l'amplitude soient négligeables à côté de ces derniers.

Ce point de vue n'est cependant pas correct, car les déphasages d'un cycle au suivant sont non corrélés, si bien que l'erreur relative qu'ils entraînent sur la mesure d'une durée t^* décroît très rapidement

quand t^* augmente. Par exemple, pour $t^* = 1$ s, on trouve

a_s (V)	$\frac{\Delta\nu}{\nu_0}$
1.....	$3,10^{-13}$
0,1.....	$3,10^{-12}$
0,01.....	$3,10^{-11}$

Les méthodes qui permettent de déterminer les fluctuations relatives de fréquence de deux oscillateurs sur de courts intervalles de temps ne donnent jamais la différence des fréquences instantanées.

Si l'on prend comme exemple la méthode des battements, à laquelle se ramènent d'ailleurs la plupart des autres, la plus petite durée mesurée est la période du battement. Cette mesure, bien qu'elle soit effectuée pendant un court laps de temps, ne donne qu'une comparaison des valeurs moyennes des fréquences *pour cet intervalle de temps*. La durée de la mesure étant généralement supérieure à la seconde, on voit, d'après les valeurs du tableau précédent, que les erreurs dues aux fluctuations de phase deviennent négligeables.

f. Non isochronisme du quartz. Loi fréquence-amplitude du quartz non entretenu. — Une dernière question se pose, celle de l'isochronisme du quartz ou, autrement dit, de la dépendance fréquence-amplitude du quartz isolé de son circuit d'entretien. Il importe, en effet, de savoir si une variation donnée de l'amplitude d'oscillation du cristal ne produit pas une variation de fréquence plus importante que celle qui est due au circuit d'entretien.

Nous allons voir que, dans nombre de cas, cet effet, quoique très faible, doit être pris en considération. Notons que L. Essen attribue en partie la haute qualité de ses anneaux de quartz à un excellent isochronisme [6].

Empruntons quelques valeurs numériques à F. J. M. Laver [6], qui signale d'ailleurs que le phénomène n'a pas fait l'objet d'étude systématique. Les expériences ont porté sur un quartz type de 100 kc/s. La fréquence de résonance série décroît quand l'amplitude de vibration augmente.

Une variation d'amplitude de 10 % produit les variations relatives de fréquence suivantes :

- a. $25 \cdot 10^{-8}$ pour une plaque coupe G-T fixée par ressort;
- b. $7 \cdot 10^{-8}$ pour une plaque coupe G-T maintenue par fils soudés;
- c. Moins de 10^{-8} pour un anneau d'Essen monté avec fils de soie.

L'étude théorique des fluctuations d'amplitude dues au bruit pour le quartz de 100 kc/s pris comme

exemple montre que, pour un régime stabilisé à 0,03 V, l'écart Δa est de $1,1 \cdot 10^{-5}$ V. On a alors :

$$\frac{\Delta a}{a_s} = \frac{1,1}{3} \cdot 10^{-3},$$

ce qui donne :

Pour l'exemple a :

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} = 9 \cdot 10^{-10} \sim 10^{-9};$$

Pour l'exemple b :

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} = 2,6 \cdot 10^{-10};$$

Pour l'exemple c :

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} = 0,4 \cdot 10^{-10}.$$

On voit ainsi que l'influence d'un faible défaut d'isochronisme du quartz prend une importance extrême pour des amplitudes de régime aussi faibles (notons que l'on opère couramment de 0,03 à 0,05 V).

Il est intéressant de mentionner aussi l'influence du système de suspension du quartz sur son isochronisme.

g. Comparaison avec les résultats expérimentaux. — Parmi les horloges les plus parfaites utilisant le montage de Pierce se trouvent celles de la Physikalisch-Technische Reichsanstalt et du National Physical Laboratory.

Les premières utilisent des barreaux de quartz coupe-Y, de 9 cm de long environ, fonctionnant à 60 kc/s.

Le coefficient de température de la fréquence est très faible et peut atteindre 10^{-8} par 1°C dans la zone de température utilisée. La température du barreau de quartz est maintenue constante à $\pm 0,001^\circ\text{C}$. On voit donc que les fluctuations de fréquence produites par les variations de température du barreau ne peuvent excéder quelques 10^{-11} .

L'amplitude d'oscillation est choisie aussi faible que possible (la différence de potentiel aux bornes du quartz peut varier de 0,5 à 0,03 V environ), de façon à éviter les variations internes de la température du quartz, par suite des frottements moléculaires [7].

Cette condition atténue aussi les écarts de fréquence dus à des modifications irrégulières du circuit d'entretien, par exemple, ceux provenant des variations des tensions d'alimentation. De même, afin de réduire l'effet de ce circuit, on emploie des quartz ayant des coefficients de surtension aussi élevés que possible, de l'ordre de 10^6 .

En résumé, on réduit le plus possible le couplage d'entretien.

Les résultats obtenus avant 1938 ont été publiés en détail [8], il en ressort que la comparaison de deux horloges de même type sur de faibles durées (de l'ordre de 1 h) montre des fluctuations de fréquence pouvant atteindre $8 \cdot 10^{-10}$ (comparaison des horloges III et IV). Les résultats sont d'ailleurs très variables d'une horloge à l'autre.

Pour ce qui est des fluctuations quotidiennes, on peut admettre que ces dernières ne dépassent pas $3 \cdot 10^{-9}$.

Il est très difficile d'attribuer les fluctuations de fréquence à une cause bien définie et il est vraisemblable que de nombreux facteurs interviennent. Néanmoins, le parfait fonctionnement du thermostat semble éliminer, comme nous l'avons vu, l'hypothèse des fluctuations de température et, d'ailleurs, s'il n'en était pas ainsi, le cycle de chauffage (quelques secondes) apparaîtrait nettement sur les graphiques.

Les valeurs numériques données par la théorie précédente (bruit de fond avec influence de la courbure de la caractéristique de l'organe stabilisateur, non isochronisme du quartz) conduisent à la plage d'erreur suivante pour le quartz de 100 kc/s étudié :

$$7 \cdot 10^{-11} < \frac{\Delta \nu}{\nu_0} < 10^{-9}$$

pour $a_s = 0,03$ V, par exemple.

Elles montrent que l'influence de l'agitation électronique dans le quartz doit être prise en considération et peut, dans certains cas, jouer un rôle important. D'autant plus que, pour des valeurs de l'amplitude stabilisée aussi faibles que celles que l'on cherche à réaliser, en vue d'éliminer les causes de fluctuations liées au circuit extérieur, la mémoire τ de l'oscillateur est de l'ordre d'une fraction de journée (pour un quartz de coefficient de surtension $Q \simeq 10^6$) et que, par conséquent, les écarts sur les divers τ ne peuvent se compenser sur un jour suivant la loi des grands nombres.

Comme nous l'avons vu, l'effet du bruit est très variable avec les conditions expérimentales; aussi, loin de le considérer comme l'unique cause, nous voyons qu'il est bon, cependant, d'y prêter une extrême attention et de s'efforcer de le réduire le plus possible.

Au National Physical Laboratory, L. Essen a obtenu une grande stabilité de fréquence par l'emploi d'anneaux de quartz. Le coefficient de température de leur fréquence est très faible. L'obtention d'une stabilité de fréquence de $\pm 10^{-10}$ néces-

site une définition de leur température à $\pm 0,06^\circ \text{C}$ près [9]. L. Essen maintient cette température constante à $\pm 0,01^\circ \text{C}$, par conséquent, les variations thermiques du quartz ne peuvent conduire là encore à des fluctuations relatives de fréquence supérieures à $1,6 \cdot 10^{-11}$.

Les fluctuations de fréquence, mises en évidence par la comparaison sur de courts intervalles de temps (de l'ordre de 1 h) de deux horloges de même type, atteignent cependant $4 \cdot 10^{-10}$, et restent inférieures à cette valeur.

Nous sommes encore dans la marge d'erreur possible due au bruit.

h. Les autres types d'oscillateurs. — On a cherché à modifier le circuit d'entretien de façon à rendre la fréquence du quartz moins tributaire de ce dernier.

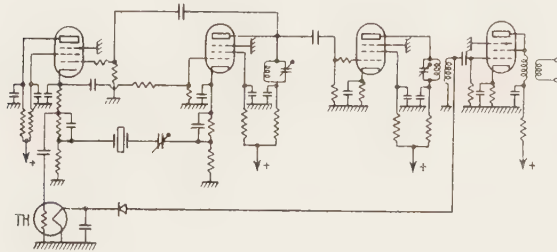


Fig. 30.

On a été ainsi amené à remplacer le montage de Pierce par des montages utilisant la résonance série du cristal.

Examinons rapidement l'un d'eux, parmi les plus

le schéma complet [10]. La description d'un oscillateur analogue a d'ailleurs été donnée par J. Verbaandert [7] qui met bien en lumière les remarquables qualités du montage.

Une théorie simplifiée est obtenue en le considérant comme un amplificateur refermé sur lui-même, le tube L_2 , étant monté en « cathodyne » (2^e étage amplificateur de gain G_2), et le tube L_1 commandé par la cathode (1^{er} étage amplificateur de gain G_1). Nous ferons abstraction des dispositifs accessoires : contre-réaction, stabilisation par « thermistance », afin de ne pas trop compliquer les calculs. En fait, ces organes stabilisateurs limitent beaucoup l'influence sur le quartz des variations accidentelles du circuit d'entretien. Leur intérêt est donc très considérable à ce point de vue, néanmoins ils n'apportent pas de modification essentielle à la théorie.

On obtient facilement le schéma réduit équivalent à l'oscillateur simplifié de la figure 31 dans laquelle :

r_2, r_4 , quelques dizaines d'ohms;
 μ , coefficient d'amplification des lampes;
 r_p , résistance intérieure des lampes $\simeq 10^6 \Omega$;
 $\frac{I_p}{r_p} = 9 \cdot 10^{-3} \text{ A/V}$.

L'équation d'oscillation avec bruit s'en déduit; indiquons-là sans entrer dans le détail des calculs : la méthode suivie pour y parvenir est analogue à celle qui a été développée à propos du montage de Pierce.

$$\left[p^2 L_1 C_1 \left[1 + \frac{C_0}{C_1} + \frac{R_1 C_0}{L_1} (r_2 + r_4) - \frac{R_1 C_0}{L_1} \frac{\left(\frac{\mu}{1 + \mu} \right) G_1 r_2 r_4 + r_2^2}{\left(\frac{r_p}{1 + \mu} \right) + r_1 + r_2} \right] + \mu R_1 C_1 \right. \\ \left. \times \left\{ 1 + \frac{C_0}{C_1} + \frac{r_2 + r_4}{R_1} + \frac{C_0}{R_1 C_1} (r_2 + r_4) (1 - L_1 C_1 \omega^2) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{R_1 C_1} [C_1 + C_0 (1 - L_1 C_1 \omega^2)] \frac{\left(\frac{\mu}{1 + \mu} \right) G_1 r_2 r_4 + r_2^2}{\left(\frac{r_p}{1 + \mu} \right) + r_1 + r_2} \right\} - 1 + \frac{C_0}{C_1} + \frac{C_1}{C_1} \right] \\ = \mu C_1 r_4 G_1 \frac{\frac{r_p}{1 + \mu} + r_1 + r_2 - \frac{r_2^2}{r_2 + r_4 + Z_c}}{\frac{r_p}{1 + \mu} + r_1 + r_2} E.$$

soignés, celui du Laboratoire National de Radio-électricité, à Bagneux (9). Nous en donnons ci-dessus

On reconnaît, sur cette équation, le terme qui assure l'entretien :

$$- \frac{1}{R_1} \frac{\frac{\mu}{1 + \mu} G_1 r_2 r_4 + r_2^2}{\frac{r_p}{1 + \mu} + r_1 + r_2},$$

(*) Je remercie M. Decaux, Ingénieur en Chef du L. N. R. pour l'intéressante documentation en matière d'horloges radioélectriques dont il a bien voulu me faire profiter.

(on a, en effet, $1 - L_1 C_1 \omega^2 \approx 0$), ainsi que celui dont dépend la loi fréquence-amplitude :

$$- \frac{R_1 C_0 \left(\frac{\mu}{1 + \mu} \right) G_1 r_2 r_4 + r_2^2}{L_1 \left(\frac{r_p}{1 + \mu} \right) + r_1 + r_2}.$$

Ce dernier a, ici, une valeur très faible; on trouve, avec les valeurs numériques indiquées sur le schéma :

$$+ \frac{R_1 C_0 \left(\frac{\mu}{1 + \mu} \right) G_1 r_2 r_4 + r_2^2}{L_1 \left(\frac{r_p}{1 + \mu} \right) + r_1 + r_2} \sim 10^{-8}.$$

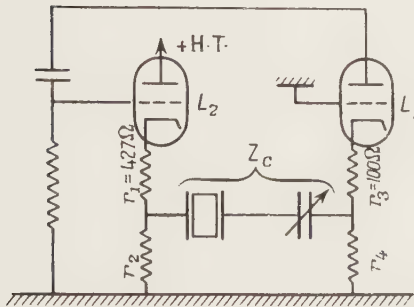


Fig. 31.

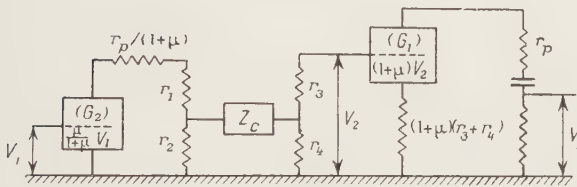


Fig. 32.

Il est donc négligeable, et l'on vérifie ainsi que ce type de montage est beaucoup plus avantageux, au point de vue du bruit, que celui de Pierce, pour lequel le terme parasite de couplage (celui dont dépend la loi fréquence-amplitude) valait :

$$\frac{C_1}{C_0 + C_1} \left(\frac{C_1}{C_0 + C_1} \right)^2 \sim 10^{-3}.$$

Coefficient de transfert du bruit. — Le coefficient de transfert du bruit a une forme très différente de celui du montage de Pierce, et cela était à prévoir, puisque la capacité C_0 , en parallèle, du circuit équivalent au quartz, joue ici un rôle bien minime. Son expression :

$$p C_1 r_1 G_1 \frac{\frac{r_p}{1 + \mu} + r_1 + r_2 + \frac{r_2^2}{r_2 + r_1 + Z_c}}{\frac{r_p}{1 + \mu} + r_1 + r_2}$$

peut être réduite en première approximation à $p C_1 r_1 G_1$ lorsque

$$\frac{\frac{r_p}{1 + \mu} + r_1 + r_2 + \frac{r_2^2}{r_2 + r_1 + Z_c}}{\frac{r_p}{1 + \mu} + r_1 + r_2}$$

est voisin de 1.

Son évaluation, avec les données numériques de la figure 31 nous conduit à :

$$p C_1 r_1 G_1 = f 3,16^{-3},$$

valeur plus faible en module que celle obtenue pour l'oscillateur de Pierce, ce qui améliore la qualité de l'oscillateur au point de vue du bruit.

On en déduit comme plus haut, quand a_s varie, les différents Δa et l'on trouve :

a_s (V).	Δa .
1.....	$3,8 \cdot 10^{-8}$
0,1.....	$3,6 \cdot 10^{-7}$
0,01.....	$3,6 \cdot 10^{-6}$
0,001.....	$3,6 \cdot 10^{-5}$

On voit que l'effet du bruit sur le système est extrêmement réduit par un choix judicieux du montage d'entretien.

M. B. Decaux a eu l'extrême amabilité de me montrer de nombreux graphiques d'horloge; on voit qu'une variation d'amplitude de 20 % à partir du régime (0,03 V environ) conduit à une variation relative de fréquence de quelques 10^{-8} . Cela nous montre que l'écart

$$\frac{\Delta a}{a_s} = 0,5 \cdot 10^{-3}$$

dû au bruit (valeur obtenue pour $a_s = 0,03$ V) ne peut entraîner qu'une fluctuation de fréquence de l'ordre de $0,5 \cdot 10^{-11}$, et il semble que les fluctuations que l'on observe soient plutôt dues à une légère instabilité des tensions d'alimentation.

D'ailleurs, l'amplitude de régime semble agir fort peu sur les fluctuations observées, comme il ressort des graphiques.

i. Précision ultime des horloges radioélectriques. —

Nous conclurons en examinant l'effet des fluctuations de fréquence précédentes, sur la mesure de longues durées (de l'ordre de 1 jour, par exemple). La mesure d'une durée nécessite le choix préalable d'un étalon de temps et il est bon, étant donné l'arbitraire de ce choix, de préciser ce que nous entendrons par là :

Le choix d'un étalon de temps se ramène toujours à celui d'un mécanisme à loi d'évolution *rigoureusement périodique*.

Par exemple, un système oscillant auto-entretenu semble, au premier abord, remplir cette condition. Si la loi du mouvement est rigoureusement sinusoïdale, on choisira pour durée étalon le temps qui sépare deux annulations successives de l'élongation.

Il suffira alors, pour mesurer une durée quelconque, de compter le nombre de zéros successifs de l'élongation du système de référence contenus dans la durée donnée.

Il est possible d'effectuer directement cette numération lorsque l'oscillation est lente (oscillation d'un pendule grave, par exemple), mais le procédé direct devient inutilisable lorsque l'oscillation est rapide. On doit alors le remplacer par des méthodes indirectes (méthode des battements, transformation de la sinusoïde en une succession d'impulsions équidistantes, etc.) *qui se ramènent toutes au premier procédé.*

Généralement, le nombre trouvé n'est pas un entier. Il en résulte, comme dans toute mesure, des erreurs dues ici à une mauvaise évaluation de la fraction de période excédentaire. Ces erreurs ont été considérablement réduites grâce au développement des techniques de comparaison des temps.

Un erreur beaucoup plus grave est celle qu'introduit la non périodicité rigoureuse du phénomène de base.

Il est, en effet, très difficile de définir avec précision ce que l'on entend par système « rigoureusement périodique ».

Le meilleur critère consiste à admettre la périodicité rigoureuse d'un système donné, et à mesurer avec cette horloge la durée de n périodes d'un autre système apparemment périodique. Si les résultats de nombreuses mesures présentent des fluctuations supérieures aux erreurs de comparaison tolérées, on pourra admettre que l'un des deux phénomènes n'est pas rigoureusement périodique.

C'est ce qui nous conduit à dire que les oscillateurs à quartz présentent des irrégularités de marche. La théorie du phénomène a mis en évidence des irrégularités de deux sortes :

a. Des dilatations ou des contractions aléatoires du pas de la sinusoïde des temps, non corrélées d'un cycle au suivant. Il s'agit, comme nous l'avons vu, de *fluctuations de phase*, qui se traduisent par des modifications de la pseudo-période instantanée et ont, par suite, même effet que des fluctuations de fréquence.

Sur une durée un peu longue, leur effet global est inobservable. Par exemple, l'imprécision qu'elles entraînent sur 1 s a été évaluée plus haut. Pour

l'exemple choisi on a trouvé, avec une amplitude de régime de 1 V, $\Delta t = 3 \cdot 10^{-13}$ s, et pour 0,01 V, $3 \cdot 10^{-11}$ s. L'imprécision sur 1 jour pour le même exemple est de l'ordre de 10^{-10} s pour une amplitude de régime de 1 V, et de 10^{-8} s pour 0,01 V.

Si l'écart absolu croît avec le temps, la précision de la mesure, au contraire, décroît rapidement. Ainsi pour 1 s et pour $a_s = 1$ V, on a

$$\frac{\Delta t}{t} = 3 \cdot 10^{-13},$$

tandis que, pour 1 jour, avec $a_s = 1$ V, on a

$$\frac{\Delta t}{t} = 10^{-15}$$

(c'est une conséquence de la loi des grands nombres).

b. Des dérives de fréquence de longue durée.

Nous avons vu qu'avec les quartz à grande surtension utilisés actuellement, et pour des amplitudes d'oscillation très faibles (0,05 à 0,03 V), la durée de vie de ces dérives est de l'ordre de une à plusieurs heures.

De tels écarts ne se compensent évidemment plus suivant la loi des grands nombres. On pourra, au contraire, observer, au cours d'une journée, l'addition d'écarts de même sens.

Prenons un exemple : pour l'anneau d'Essen examiné plus haut, on a trouvé l'écart relatif moyen :

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} = 7 \cdot 10^{-11}.$$

La constante de temps de réaction aux chocs était de l'ordre de 1 h. Si deux ou trois écarts de même sens s'ajoutent, l'écart relatif devient :

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} = 1,4 \cdot 10^{-10} \text{ à } 2,1 \cdot 10^{-10},$$

ce qui conduit à un écart de marche diurne de

$$0,00002 \text{ s.}$$

écart qui devient bien plus important lorsque s'ajoute un léger défaut d'isochronisme du quartz.

Pour fixer les idées, concluons en donnant une valeur expérimentale indiquée par A. Scheibe [8] :

L'écart de marche observé par comparaison des horloges III et IV de la P. T. R. pendant une observation de 12 h ne dépasse pas $\pm 0,00008$ s. Il peut être dû au bruit de fond introduit par le quartz.

j. Les horloges moléculaires. — Intérêt des vibrations moléculaires. — La fréquence des horloges à quartz, d'une grande constance sur les courts intervalles de temps, ne permet pas encore de définir

une base de temps de longue durée. Les quartz sont sujets à déformation, vieillissement, etc. et la précision qu'elles donnent est encore insuffisante pour qu'elles puissent supplanter les mesures astronomiques sur les longs intervalles de temps; elles permettent à peine l'étude des irrégularités de mouvement de la terre.

Il ne semble pas facile d'éliminer ces défauts et l'on a été amené à étudier un nouvel étalon de temps : une fréquence de rotation moléculaire, la fréquence 23 870,13 Mc/s de la molécule NH_3 . Un tel étalon présenterait le gros avantage d'être constant dans le temps et indépendant des influences extérieures.

Si un tel choix est théoriquement simple, il pose aux techniciens des problèmes très compliqués, en particulier celui de la comparaison du « temps moléculaire » et du temps sidéral. Il nécessite l'emploi de klystrons, de durée de vie limitée et dont le bruit de fond est toujours très notable.

Les schémas de base. — Indiquons sommairement le schéma le plus couramment utilisé [11] ⁽¹⁰⁾.

L'oscillateur A (oscillateur à klystron) est modulé en fréquence et balaye une bande étroite centrée sur la raie 23 870,13 Mc/s. Toutes les fois que sa fréquence passe par cette valeur privilégiée, le gaz, contenu dans un guide d'ondes, présente une absorption maximum. Il en résulte, à la sortie du guide, une succession d'impulsions négatives.

On fait battre simultanément A avec un oscillateur B : la fréquence des battements, comme la fréquence de balayage de A, est variable; elle attaque un amplificateur à circuit accordé de fréquence ν_0 .

Toutes les fois que la fréquence de battement

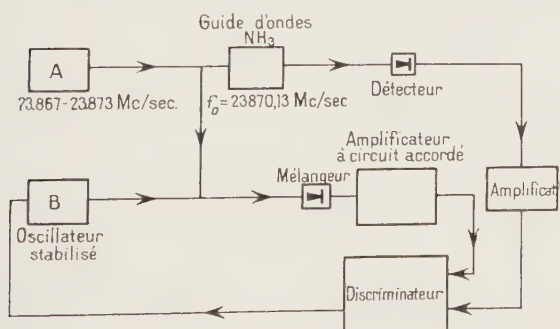


Fig. 33.

passé par la valeur ν_0 , on obtient une impulsion à la sortie de l'amplificateur.

On obtient, en définitive, deux séries d'impulsions décalées l'une par rapport à l'autre, dont le déca-

lage produit dans un discriminateur un courant correcteur qui sert à régler la fréquence de B.

On utilise aussi un autre dispositif, indiqué par R. V. Pound [12], pour synchroniser la fréquence de l'oscillateur B avec la raie de référence 23 870,13.

On produit toujours, grâce à un discriminateur,

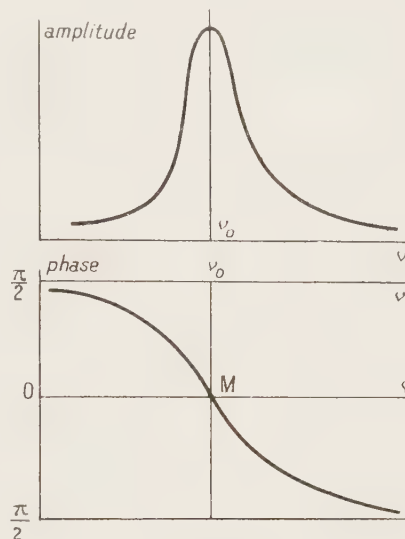


Fig. 34.

un courant correcteur proportionnel à la différence des fréquences de l'oscillateur et de la raie, que l'on applique à l'oscillateur B.

La loi exprimant le contrôle est :

$$S = \frac{\Delta f}{\partial f} = 1 + k G \rho,$$

S est le facteur de stabilisation;

Δf et ∂f , les écarts de fréquence initial et final; ρ , le changement de fréquence produit par un voltage correcteur unité.

Comme on le sait, le principe des discriminateurs est généralement basé sur les courbes classiques de la figure 34 qui traduisent le comportement d'un circuit résonant (ici la cavité renfermant NH_3) sous l'effet de fréquences plus ou moins écartées de sa fréquence propre.

Comme le sens du courant correcteur doit dépendre du signe de l'écart, R. V. Pound utilise la deuxième courbe dans la région voisine de M (résonance et voisinage).

L'originalité de la méthode tient à l'emploi du T magique comme discriminateur en hyperfréquence. Signalons à cette occasion qu'un discriminateur basé sur le même principe a été décrit par G. Raoult à l'occasion du Colloque national A. M. P. E. R. E. du 24-27 février 1952.

(10) Nous empruntons ce schéma à L. Essen [11].

Il serait long de décrire en détail cet intéressant dispositif, et cela sortirait du cadre de notre étude. Revenons donc, après ce court résumé des principes de base, au problème plus particulier, de l'influence du bruit de fond introduit par le klystron.

Équations de réglage. — Sans approfondir les calculs, il est visible que l'oscillateur est toujours régi par l'équation générale (II.2) où l'on ne tient d'abord pas compte du bruit introduit par les résistances

$$(II.2) \quad V + Zz f(V) = 0,$$

V étant le potentiel rassembleur que nous prenons pour variable.

En effet, la théorie simplifiée de l'oscillateur klystron permet de le ramener au schéma suivant (fig. 35) où les deux cavités sont remplacées par des circuits oscillants classiques, et le coaxial (supposé

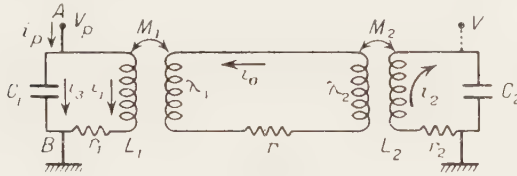


Fig. 35.

infiniment court) par les impédances mutuelles M_1 et M_2 .

Pour expliciter l'équation (II.2), il nous reste à déterminer la tension $-Zz f(V)$ ramenée par réaction à l'entrée (ici le rassembleur). Rappelons que Z est le coefficient de transfert collecteur-rassembleur, et z l'impédance entre les bornes fictives A, B du collecteur.

Détermination de Zz . — Les équations de couplage entre les circuits oscillants de plaque et de grille sont, avec les notations indiquées sur le dessin :

$$(II.34) \quad \begin{bmatrix} pL_1 + r_1 & -p^2 \frac{M_1^2}{r + p(\lambda_1 + \lambda_2)} \\ -p^2 \frac{M_1 M_2}{r + p(\lambda_1 + \lambda_2)} & pL_2 + r_2 + \frac{1}{C_2 p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_p \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(II.35) \quad \begin{bmatrix} pL_2 + r_2 + \frac{1}{C_2 p} & -p^2 \frac{M_2^2}{r + p(\lambda_1 + \lambda_2)} \\ -p^2 \frac{M_1 M_2}{r + p(\lambda_1 + \lambda_2)} & pL_1 + r_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

posant

$$\frac{1}{r + p(\lambda_1 + \lambda_2)} = \tilde{z}$$

et tenant compte de l'égalité

$$i_2 = p C_2 V,$$

l'élimination de i_1 entre les équations (II.34) et (II.35) donne :

$$V = \frac{p^3 M_1 M_2 C_1 \tilde{z} V_p}{\begin{bmatrix} (p^2 L_2 C_2 + p r_2 C_2 + 1 - p^3 M_2^2 C_2 \tilde{z}) \\ \times (p^2 L_1 C_1 + p r_1 C_1 - p^3 M_1^2 C_1 \tilde{z}) \\ - p^6 (M_1 M_2 \tilde{z})^2 C_1 C_2 \end{bmatrix}}.$$

La valeur de Z , si l'on suppose un couplage lâche, c'est-à-dire M_1 et M_2 petits, est donc :

$$Z = \frac{p^3 M_1 M_2 \tilde{z} C_1}{(p^2 L_2 C_2 + p r_2 C_2 + 1)(p^2 L_1 C_1 + p r_1 C_1 + 1)};$$

dans ce cas (couplage lâche), z est aisément déterminé, on a :

$$z = \frac{r_1 + p L_1}{p^2 L_1 C_1 + p r_1 C_1 + 1},$$

on en tire l'expression de Zz

$$Zz = \frac{p^2 M_1 M_2 \tilde{z}}{(p^2 L_2 C_2 + p r_2 C_2 + 1)(p^2 L_1 C_1 + p r_1 C_1 + 1)},$$

si r est négligeable, $\tilde{z}$ est imaginaire pur, Zz est de la forme :

$$Zz = \frac{pk}{(p^2 L_2 C_2 + p r_2 C_2 + 1)(p^2 L_1 C_1 + p r_1 C_1 + 1)} \quad (k \text{ réel}).$$

Les courbes bien connues donnant la variation de la phase et de l'amplitude de $Zz = \frac{V}{i_p}$ avec la fréquence (Harrison, *Klystron tubes*, p. 117, fig. 8-4) sont correctement représentées par cette expression. On voit que k doit être négatif.

Détermination de $i_p = f(V)$. — Si V est une sinusoïde pure, i_p est aussi une sinusoïde pure résultant du filtrage par la cavité collectrice du courant transporté par le faisceau électronique. Le remplacement de l'opérateur Zz par sa valeur complexe fonction de p sera donc valable quelle que soit l'amplitude du potentiel sinusoïdal appliqué au rassembleur, contrairement à ce qui a lieu dans le cas des oscillateurs à lampes. Dans ce dernier cas, en effet, à un potentiel sinusoïdal de grille de grande amplitude correspond un courant plaque qui n'est plus du tout sinusoïdal (de la forme $s_0 V + a V^2 + b V^3$).

Au potentiel rassembleur $V = A e^{j\omega t}$ correspond, dans le collecteur, le courant

$$f(V) = i_p = Y_{ms} \frac{J_1(x)}{x} e^{-j\varphi} V,$$

avec les notations classiques [13]

$$x = \frac{\sqrt{2} \pi \lambda}{E_0} A, \quad \varphi = \tau + \frac{\pi}{2}, \quad Y_{ms} = \frac{\beta^2 \pi N I_0}{E_0}.$$

Équation d'oscillation. — Si l'amplitude d'oscilla-

tion n'est pas trop grande, on peut remplacer $\frac{J_1(x)}{x}$ par les premiers termes de son développement en série :

$$\frac{J_1(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{8}.$$

L'équation d'oscillation s'écrit alors (en tenant compte de ce que A est une fonction de t lentement variable) :

$$(II.36) \quad (p^2 L_2 C_2 + p r_2 C_2 + 1)(p^2 L_1 C_1 + p r_1 C_1 + 1) V + k V_{ms} e^{-j(\tau + \frac{\pi}{2})} \left(1 - \frac{\gamma^2 \pi^2 N^2}{8 E_0^2} I^2 \right) p I = 0$$

$$(k \neq 0).$$

Cette équation, du quatrième degré en p , est plus compliquée que celles que nous avons rencontrées jusque-là, cependant il est encore possible de l'approcher par une équation du second degré. En effet, lorsque le collecteur est couplé au guide d'ondes qui contient NH_3 , son coefficient de surtension est beaucoup plus faible que celui du rassembleur et l'on peut considérer que le rassembleur impose sa fréquence.

L'équation d'oscillation (II.36) est ainsi ramenée au type classique où la stabilisation est contrôlée par l'amplitude.

Remarquons que le coefficient du terme

$$\left(1 - \frac{\gamma^2 \pi^2 N^2}{8 E_0^2} I^2 \right) p I$$

est complexe $\left[k y_{ms} e^{-j(\tau + \frac{\pi}{2})} \right]$ et entraîne, par suite, une dépendance fréquence-amplitude dont la loi pourrait être déduite de la théorie générale.

Influence des sources de bruit. — Pour exprimer l'effet des sources de bruit, il reste encore à déterminer le second membre de l'équation (II.36) et à le mettre, conformément à la méthode générale, sous la forme

$$Z_1 E_1 + Z_2 E_2.$$

Les sources de bruit les plus importantes sont en évidence sur le schéma : ce sont les résistances fictives r_1 et r_2 des cavités, qui créent les f. é. m. aléatoires E_1 et E_2 . Z_1 et Z_2 sont les coefficients de transfert du bruit, qu'il est possible de déterminer connaissant le tube oscillateur employé.

Nous voyons ainsi que l'oscillateur klystron employé dans les horloges moléculaires peut être étudié par les mêmes méthodes que les oscillateurs à quartz classiques, moyennant quelques hypothèses simplificatrices. Ayant indiqué la marche qu'il conviendrait de suivre, nous n'aborderons, cependant, pas ici le détail des calculs.

CONCLUSION.

L'objet de ce travail était d'étudier l'effet du bruit de fond sur le régime, et plus particulièrement sur la fréquence, d'auto-oscillateurs à lampes stabilisés en amplitude.

Après un bref rappel des méthodes classiques pour le cas linéaire, j'ai vérifié qu'il est légitime de négliger l'effet schottky des lampes d'entretien, ce qui a limité le problème à l'étude de l'influence de l'effet Johnson des circuits oscillants.

Le comportement de l'oscillateur perturbé par ce bruit est très complexe, car le système n'est plus régi par des lois linéaires. Les méthodes classiques, valables pour les oscillateurs linéaires étant inapplicables ici, il a été d'abord nécessaire de les modifier pour les adapter au cas envisagé. Il a été, d'ailleurs, commode de scinder la difficulté et d'envisager d'abord l'effet d'une impulsion électronique isolée :

L'action directe de cette dernière est double, et se réduit à une perturbation d'amplitude, ainsi qu'à un petit déphasage. On est alors amené, pour traduire simplement ce dédoublement de l'effet, à dédoubler aussi la cause et à rechercher deux composantes adéquates de l'impulsion originelle.

On y parvient, en particulier, grâce à une méthode due à S. O. Rice et il est facile ensuite de suivre, de façon séparée, la loi d'évolution du déphasage et la loi d'évolution de l'amplitude tributaires des deux composantes.

J'ai fait la théorie de ces deux effets, et j'ai montré que la non linéarité de l'oscillateur empêche de les ramener à une même loi, ce qui est le cas pour les oscillateurs linéaires traditionnels. Le passage au cas réel où les chocs sont très nombreux et répartis au hasard dans le temps conduit au même résultat, c'est-à-dire à deux lois bien distinctes : une loi aux phases, et une loi aux amplitudes.

La première loi exprime que le système garde indéfiniment la mémoire des petits déphasages imprimés par les chocs électroniques naturels. La deuxième exprime que toute petite perturbation d'amplitude doit s'amortir exponentiellement, avec une constante de temps caractéristique de l'oscillateur.

Si l'on porte son attention sur les petits déphasages aléatoires, l'on voit facilement que leur effet est le même que des variations de la fréquence instantanée. Effectivement, ils entraînent des dilations ou des contractions aléatoires du pas de la sinusoïde du signal, variables d'un cycle à l'autre. Il est commode de comparer toujours cette pseudo-sinusoïde, dont le pas est localement déformé, à une sinusoïde théorique parfaite choisie pour repère. Supposant les deux courbes en coïncidence à l'ori-

gine des temps, on prend pour critère d'imperfection le décalage existant, à un instant t , entre un arceau de la sinusoïde déformée et l'arceau de même rang de la sinusoïde de base. Le carré moyen de cet écart est proportionnel au temps, il s'en suit que l'imprécision sur une durée t , entraînée par les petits déphasages, a une valeur relative décroissante quand la durée t augmente : l'effet global des déphasages élémentaires s'atténue sur de longues durées suivant la loi des grands nombres.

L'évaluation de l'effet des petits déphasages, en prenant pour exemple un oscillateur à quartz de 100 kc/s du type employé en horlogerie radio-électrique, montre qu'il est notable si on l'envisage localement. Les fluctuations relatives du pas du signal atteignent, en effet, quelques 10^{-8} . Cependant, l'effet global s'atténue très vite, et l'on vérifie qu'il est inobservable avec les moyens de mesure actuels.

Ce premier résultat conduit à examiner d'autres causes possibles de variation de la fréquence, et il apparaît qu'à l'effet direct précédent se superpose un effet « indirect » : la fréquence des oscillateurs réels est reliée à leur amplitude d'oscillation. Cette dépendance peut tenir au circuit d'entretien, elle peut aussi tenir aux qualités du cristal qui peut avoir, comme tout pendule matériel, un isochronisme imparfait. De toutes façons, les variations d'amplitude accidentelles, en particulier celles dues au bruit, doivent retentir sur la fréquence. Il ne reste plus qu'à évaluer numériquement l'importance de cette dépendance fréquence-amplitude.

Le premier montage pris comme exemple est celui d'un oscillateur de Pierce. Avec un anneau de quartz d'Essen de 100 kc/s, l'écart de fréquence moyen, lié aux fluctuations d'amplitude produites par le bruit, a une valeur théorique comprise entre $7 \cdot 10^{-11}$ et 10^{-9} . Les mesures montrent des fluctuations de l'ordre de $4 \cdot 10^{-10}$; il est donc visible que l'effet du bruit donne une explication plausible des écarts observés dans les montages très soignés, où sont éliminées la plupart des causes externes de variation de la fréquence. Un autre exemple, fourni par un montage utilisé au Laboratoire National de Radioélectricité montre la possibilité de réduire de façon extrême les perturbations de fréquence apportées par le bruit.

Les méthodes utilisées sont aussi applicables à des oscillateurs basés sur des principes très différents de ceux des horloges à quartz, aux oscillateurs Klystrons, par exemple. Ces derniers sont employés dans les horloges moléculaires et la précision que l'on peut en attendre est encore très limitée, car ces tubes introduisent un bruit important.

APPENDICE I.

L'influence d'une impulsion sur l'oscillation du circuit de la figure 6 est traduite par l'équation :

$$\frac{d^2 V}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{dV}{dt} + \omega_0^2 = \omega_0^2 G(t - t_j)$$

avant l'instant t_j du choc, la variable V obéit à la loi pseudo-sinusoïdale :

$$V = a(t) \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Si $a(t)$ est lentement variable $\frac{da}{dt}$ est négligeable et l'on a

$$\frac{dV}{dt} \simeq a \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi);$$

exprimons que le choc produit, à l'instant t_j , une discontinuité de la vitesse $\frac{dV}{dt}$ sans modification de V , on a

$$\Delta V = \left[\Delta a \sin(\omega_0 t + \varphi) + a \Delta \varphi \cos(\omega_0 t + \varphi) \right]_{t=t_j} = 0,$$

$$\Delta \left(\frac{dV}{dt} \right) = \left[\begin{aligned} &\omega_0 \Delta a \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ &- a \omega_0 \Delta \varphi \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned} \right]_{t=t_j} = q \omega_0$$

(en désignant par q l'échelon $\int G(t - t_j) dt$) :
On en tire :

$$\begin{aligned} \Delta a &= q \omega_0 \cos(\omega_0 t_j + \varphi), \\ a \Delta \varphi &= -q \omega_0 \sin(\omega_0 t_j + \varphi), \end{aligned}$$

t_j désignant l'instant du choc.

Il peut être commode de supposer que l'on a $\varphi = 0$ avant le choc, les formules deviennent alors :

$$\begin{aligned} \Delta a &= q \omega_0 \cos \omega_0 t_j, \\ a \Delta \varphi &= -q \omega_0 \sin \omega_0 t_j. \end{aligned}$$

Ces expressions ne font pas intervenir l'amortissement du circuit, elles sont donc valables pour un amortissement nul, et aussi pour un circuit auto-entretenu, tant que l'oscillation est très peu relaxée et peut être assimilée à une sinusoïde pure:

APPENDICE II.

L'oscillation forcée d'un réseau linéaire attaqué par la f. é. m.

$$E = E_0 \sin(2\pi \nu t + \varphi_0)$$

est donnée par l'équation générale [1] :

$$H_i(\nu) V = E_0 \sin(2\pi \nu t + \varphi_0).$$

La solution cherchée est de la forme :

$$V = V_0 \sin(2\pi\nu t + \psi_0),$$

le remplacement des lignes trigonométriques réelles par des exponentielles complexes conduit à l'équation équivalente :

$$H_i(\nu) V_0 e^{j\psi_0} e^{j2\pi\nu t} = E_0 e^{j\varphi_0} e^{j2\pi\nu t}$$

ou

$$H_i(\nu) V_0 e^{j\psi_0} = E_0 e^{j\varphi_0},$$

expression qui exprime que $V_0 e^{j\psi_0}$ est le quotient des deux nombres complexes : $E_0 e^{j\varphi_0}$ et $H_i(\nu)$.

$E_0 e^{j\varphi_0}$ ayant pour image $m'(\nu)$ et $H_i(\nu)$ ayant pour image le point $m(\nu)$ du diagramme de Nyquist du réseau, nous voyons que $m''(\nu)$, image de $E_0 e^{j\varphi_0}$ se déduit de m' et m par la construction bien connue.

APPENDICE III.

$G_1(t - t_j)$ est de la forme :

$$G_1(t - t_j) = \sum_n C_n \cos(\omega_n t - \varphi_n) \cos \omega_0 t,$$

avec

$$\omega_n = q \Delta\nu \cos \pi \nu_0 t_j,$$

$$\Delta\nu = \frac{1}{T}, \quad \omega_n = 2\pi \frac{n}{T}, \quad \omega_0 = 2\pi \frac{n_0}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}};$$

prenons l'un des termes de cette somme :

$$C_n \cos(\omega_n t - \varphi_n) \cos \omega_0 t$$

et mettons-le sous la forme :

$$\frac{C_n}{2} \{ \cos[(\omega_0 + \omega_n)t - \varphi_n] + \cos[(\omega_0 - \omega_n)t + \varphi_n] \},$$

L'équation :

$$LC \frac{d^2 V_1}{dt^2} + rC \frac{dV_1}{dt} + V_1 = G_1(t - t_j)$$

devient, lorsqu'on remplace $G_1(t - t_j)$ par le terme choisi :

$$LC \frac{d^2 V_1}{dt^2} + rC \frac{dV_1}{dt} + V_1 = \frac{C_n}{2} [\cos(\omega t - \varphi_n) + \cos(\omega' t + \varphi_n)]$$

en posant

$$\omega = \omega_0 + \omega_n, \quad \omega' = \omega_0 - \omega_n,$$

on en tire, en supposant que ω_n reste petit, c'est-à-dire que le système a une faible largeur de bande (amortissement faible) :

$$V_1 = \frac{\omega_0 C_n}{2\sqrt{r^2 C^2 \omega_0^4 + 4\omega_n^2}} \times [\cos(\omega t - \varphi_n + \psi_n) + \cos(\omega' t + \varphi_n + \psi'_n)],$$

ω et ω' étant deux valeurs symétriques par rapport à ω_0 , on peut écrire :

$$\psi_n = -\frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon_n, \quad \psi'_n = \frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon_n.$$

On a alors :

$$V_1 = \frac{\omega_0 C_n}{\sqrt{r^2 C^2 \omega_0^4 + 4\omega_n^2}} \left[\cos\left(\frac{\omega + \omega'}{2} t - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega - \omega'}{2} t - \varphi_n - \varepsilon_n\right) \right]$$

ou

$$V_1 = \frac{\omega_0 C_n}{\sqrt{r^2 C^2 \omega_0^4 + 4\omega_n^2}} \cos(\omega_n t - \varphi_n - \varepsilon_n) \sin \omega_0 t.$$

Il ne reste plus qu'à sommer par rapport à l'indice n

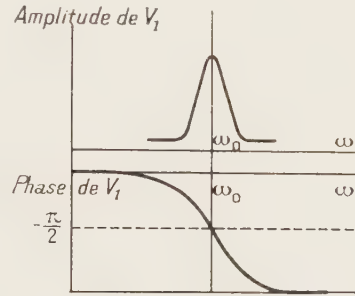


Fig. 36.

pour obtenir la solution générale avec $G_1(t - t_j)$ au second membre.

Cette solution est donc :

$$V_1 = \sin \omega_0 t \sum_n \frac{\omega_0 C_n}{\sqrt{r^2 C^2 \omega_0^4 + 4\omega_n^2}} \cos(\omega_n t - \varphi_n - \varepsilon_n);$$

elle est bien de la forme cherchée.

Le raisonnement est le même lorsque c'est $G_2(t - t_j)$ qui figure au second membre.

APPENDICE IV.

La variation d'amplitude élémentaire infligée au signal $a_s \sin(\omega_s t + \varphi)$ par un choc naturel isolé d'échelon q a été calculée plus haut; on a trouvé :

$$\Delta a = q \omega_s \cos(\omega_s t_j + \varphi).$$

On ne restreint pas la généralité des raisonnements en supposant que les chocs très nombreux produits par la source de bruit sont identiques et répartis au hasard. Les variations d'amplitude qu'ils produisent sont tantôt positives, tantôt négatives, et

leurs amortissements, après chaque impulsion, suivent une loi exponentielle.

La variation d'amplitude résultante :

$$\sum_{t_j} q \omega_s e^{-\frac{t-t_j}{\tau}} \cos(\omega_s t_j + \varphi)$$

a donc une moyenne nulle.

Si n est le nombre moyen de chocs naturels par unité de temps, le nombre total moyen de chocs de 0 à t^* est nt^* . Le carré moyen de la fluctuation d'amplitude résultante au bout du temps t^* est

$$\begin{aligned} \overline{V^2(t)} &= nt^* q^2 \omega_s^2 e^{-2\frac{t-t_j}{\tau}} \cos^2(\omega_s t_j + \varphi) \\ &= nt^* q^2 \omega_s^2 \frac{\tau}{4} \frac{1}{t^*} = \frac{1}{4} n q^2 \omega_s^2 \tau. \end{aligned}$$

APPENDICE V.

Le déphasage élémentaire infligé au signal $a_s \sin(\omega_s t + \varphi)$ par un choc naturel isolé d'échelon q est, de même,

$$\Delta\varphi = -\frac{q\omega_s}{a_s} \sin(\omega_s t_j + \varphi).$$

Les déphasages produits par les nombreux chocs naturels sont tantôt positifs, tantôt négatifs, nuls en moyenne.

Le nombre total moyen de chocs de 0 à t^* étant nt^* , le carré moyen de la fluctuation de phase résultante au bout du temps t^* est

$$\overline{\Delta\Phi^2} = nt^* \left(\frac{q\omega_s}{a_s} \right)^2 \overline{\sin^2(\omega_s t_j + \varphi)} = \frac{1}{2} nt^* \frac{q^2 \omega_s^2}{a_s^2}.$$

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] A. BLAQUIÈRE, *Les oscillateurs non linéaires et le diagramme de Nyquist* (*J. Phys. Rad.*, 13, 1952, p. 527). *Ibid.*, p. 636.
- [2] S. GOLDMAN, *Frequency analysis, modulation and noise* (Mc Graw-Hill Book Company, Inc., 1948, p. 312-317).
- [3] P. VIGOUREUX et C. F. BOOTH, *Quartz vibrators and their applications*, p. 67 (quartz n° 3) (London, his majesty's stationery office, 1950).
- [4] P. VIGOUREUX et C. F. BOOTH, *Ibid.*, p. 130, table 12 (quartz type anneau d'Essen).
- [5] RAYMOND A. HEISING, *Quartz Crystals for electrical circuits, their Design and manufacture* (New-York, D. Van Nostrand Company, Inc, 1947, p. 356-410).
- [6] L. ESSEN, *Frequency standardization* (*Proc. Inst. Electr. Eng.*, vol. 98, n° 62, 1951, p. 154).
F. J. M. LAVER, *Proc. Inst. Electr. Eng.*, vol. 98, n° 62, 1951, p. 169.
- [7] J. VERBAANDERT, *L'horloge à quartz des laboratoires radioélectriques*. (*Ann. franç. Chron.*, 1952; Communications de l'Observatoire Royal de Belgique, n° 42).
- [8] A. SCHEIBE, *Mesure du temps à la Physikalisch-Technische Reichsanstalt au moyen d'horloges à quartz*, (*Journées internationales de chronométrie et de métrologie*, juillet 1937, Éditions de la *Revue d'Optique théorique et instrumentale*, 1939).
- [9] P. VIGOUREUX et C. F. BOOTH, *Quartz vibrators and their applications* (London, his majesty's stationery office, 1950, p. 328).
- [10] B. DECAUX, *Temps et Fréquence; Installation de mesures du Laboratoire National de Radio-électricité* (*Journées internationales de chronométrie et de métrologie*, juillet 1937, Éditions de la *Revue d'Optique théorique et instrumentale*, 1939).
- [11] L. ESSEN, *Frequency standardization* (*Proc. Inst. Electr. Eng.*, vol. 98, n° 62, p. 161-163).
- [12] R. V. POUND, *Frequency stabilization of Microwave oscillators* (*Proc. Inst. Rad. Eng.*, 35, 1947, p. 1405).
- [13] A. E. HARRISON, *Klystron tubes* (New-York and London, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., 1947, p. 116-120).
- [14] S. O. RICE, *Bell system Tech. J.*, july 1944.
- [15] A. BLAQUIÈRE, *C. R. Acad. Sc.*, 235, 1952, p. 1201; 233, 1951, p. 345; 233, 1951, p. 1434; 234, 1952, p. 419; 234, 1952, p. 710; 234, 1952, p. 1140.
- [16] R. M. LERNER, *The effect of noise on the frequency stability of a linear oscillator* (Worcester Polytechnic Institute).
- [17] L. ESSEN, *A new form of frequency and time standard* (*Proc. Phys. Soc.*, London, 50, 1938, p. 413).
- [18] H. B. LAW, *An instrument for short-period frequency comparisons of great accuracy* (*J. Inst. Elec. Eng.*, Part III, 94, 1947, p. 38).
- [19] C. F. BOOTH et F. J. M. LAVER, *A standard of frequency and its applications* (*J. Inst. Elect. Eng.*, Part III, 93, 1946, p. 223).
- [20] A. BLANC-LAPIERRE et P. LAPOSTOLLE, *Fluctuations dans les grandeurs physiques quasi sinusoïdales* (*J. Phys. Rad.*, VII, 1946, p. 153).

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Les isolants ferroélectriques.

Vu et approuvé :

Paris, le 14 avril 1953.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

A. CHÂTELET.

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

J. SARRAILH.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

55, Quai des Grands-Augustins.

143 558.

Dépôt légal d'imprimeur, 1953, n° 864

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
143558 Quai des Grands-Augustins, 55.
